Concurso para Professor Adjunto do Departamento de Estatística da UFMG
(EDITAL N^0 138, DE 18 DE FEVEREIRO DE 2011)

1. **(23 pontos)** Considere uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ definidas no mesmo espaço de probabilidade.

   (a) **(10 pontos)** Assuma que X_1 segue a distribuição Normal com média zero e variância $\sigma^2 > 0$. Para $n \in \mathbb{N}$ fixado, $t \in \mathbf{R}$ e $j \in \{1, \ldots, n\}$, determine a distribuição condicional de X_j dado $X_1 + X_2 + \cdots + X_n = t$.

   (b) **(8 pontos)** Seja $Y_k = \mathbb{E}(X_k | X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$, onde $k \in \{1, \ldots, n\}$. Determine condições sobre a distribuição de X_1 que garantam que a sequência $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$, converge. Diga qual é o limite da sequência e o tipo de convergência que ocorre.

   (c) **(5 pontos)** As condições que você obteve no item anterior são necessárias e suficientes ou somente suficientes? (Ou seja, a sequência $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$, poderia convergir sem essas condições serem satisfeitas?) Explique a sua resposta.

2. **(32 pontos)** Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}, \quad x > 0 \,; \lambda > 0.$$

   (a) **(3 pontos)** Obtenha o limite inferior para a variância de estimadores não tendenciosos de λ.

   (b) **(3 pontos)** Encontre o estimador de máxima verossimilhança $\hat{\lambda}_1$ de λ.

   (c) **(3 pontos)** Calcule o erro quadrático médio deste estimador.

   (d) **(2 pontos)** Este estimador é consistente? Justifique sua resposta.

   (e) **(2 pontos)** Com base no estimador obtido em (b), obtenha um estimador $\hat{\lambda}_2$ não tendencioso de λ.

   (f) **(2 pontos)** Calcule o erro quadrático médio deste estimador.

   (g) **(2 pontos)** Este estimador é consistente? Justifique sua resposta.

   (h) **(2 pontos)** A variância deste estimador atinge o limite inferior calculado em (a)?

   (i) **(2 pontos)** Compare os estimadores obtidos em (b) e em (e). Qual deles você preferiria? Justifique sua resposta.

(j) **(3 pontos)** Encontre o estimador de máxima verossimilhança de $E(X_1)$ e de $Var(X_1)$.

(k) **(3 pontos)** Descreva a distribuição assintótica do estimador $\hat{\lambda}_1$.

(l) **(3 pontos)** Com base no resultado obtido em (k), construa um intervalo de $100(1-\alpha)\%$ (aproximado) para λ.

(m) **(2 pontos)** Descreva como conduziria um experimento computacional para avaliar a qualidade do intervalo obtido em (l).

3. **(20 pontos)** Seja $X_1, \ldots X_n$ uma amostra aleatória da distribuição com função de densidade de probabilidade

$$p(x) = \theta x^{\theta-1}, \ \ 0 < x < 1; \ \ \theta > 0.$$

(a) **(7 pontos)** Obtenha um teste UMP de $H_0 : \theta \leq \theta_0$ $(\theta_0 > 0)$ versus $H_1 : \theta > \theta_0$ de nível α.

(b) **(7 pontos)** Obtenha um teste UMP de $H_0 : \theta \geq \theta_0$ $(\theta_0 > 0)$ versus $H_1 : \theta < \theta_0$ de nível α.

(c) **(6 pontos)** Determine uma quantidade pivotal e encontre um intervalo de confiança para θ com coeficiente de confiança $1-\alpha$.

4. **(25 pontos)** Considere a seguinte função de probabilidade

$$f(y;\alpha,\beta) = \left(\begin{array}{c} y+\alpha-1 \\ y \end{array} \right) (1-\beta)^{\alpha}\beta^{y}, \ \ y = 0, 1, 2, \ldots.$$

onde α e β são parâmetros em princípio desconhecidos tais que $\alpha > 0$ e $0 < \beta < 1$.

(a) **(7 pontos)** Verifique que essa distribuição não pertence à Família Exponencial (FE) na forma $f(y;\theta,\phi) = exp\{\phi(y\theta - b(\theta)) + c(y;\phi)\}$. Imponha uma condição para que essa distribuição pertença à FE.

Sob a condição imposta no item (a):

(b) **(6 pontos)** Calcule $E[Y] = \mu$ e a função de variância $V(\mu)$.

(c) **(6 pontos)** Suponha uma amostra independente e identicamente distribuída de tamanho n. Calcule a função desvio $D(y;\hat{\mu})$ e $Var(\hat{\beta})$, onde $\hat{\beta}$ e $\hat{\mu}$ são estimadores de máxima verossimilhança.

(d) **(6 pontos)** Obtenha a estatística de Wald para testar $H_0 : \beta = 1/2$ versus $H_1 : \beta \neq 1/2$. Qual é a distribuição nula assintótica dessa estatística?