8

Variáveis Aleatórias Discretas: A de Poisson e Outras

ESQUEMA DO CAPÍTULO

8.1 A Distribuição de Poisson

- **Definição:**

  Seja X uma variável aleatória discreta, tomando os seguintes valores: 0, 1, 2, ..., *n*, ... Se

$$P(X = k) = \frac{e^{-\alpha}\alpha^{k}}{k!}, k = 0,1,2,\ldots,n,\ldots,$$

  diremos que X tem ***distribuição de Poisson***, com parâmetro $\alpha > 0$.

- **Observação:**

  Para verificar que a expressão acima representa uma legítima distribuição de probabilidade, basta observar

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha}\alpha^{k}}{k!} = e^{-\alpha}e^{\alpha} = 1.$$

8.1 A Distribuição de Poisson

- **Teorema:**
  Se X tiver distribuição de Poisson, com parâmetro α, então E(X) = α e V(X) = α.
- **Demonstração:**

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k e^{-\alpha} \alpha^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha} \alpha^k}{(k-1)!}.$$

  Fazendo-se $s = k$ -1, verificamos que

$$E(X) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha} \alpha^{s+1}}{s!} = \alpha \sum_{s=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha} \alpha^{s}}{s!} = \alpha \times 1 = \alpha.$$

  De maneira semelhante, mostra-se que

  V(X) = α.
- **Comentário:**
  Note-se que uma variável aleatória de Poisson apresenta a interessante propriedade de o seu valor esperado ser igual à sua variância.

8.2 A Distribuição de Poisson como Aproximação da Binomial

- **Teorema:**

  Seja X uma variável aleatória distribuída binomialmente com parâmetro *p* (baseado em *n* repetições de um experimento). Isto é,

  $$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

  Admita-se que quando $n \to \infty$, fique $np = \alpha$ (constante), ou, equivalentemente, quando $n \to \infty$, $p \to 0$, de modo que $np \to \alpha$. Nessas condições teremos

  $$\lim_{n \to \infty} P(X = k) = \frac{e^{-\alpha}\alpha^k}{k!},$$

  que é a distribuição de Poisson com parâmetro α.

8.2 A Distribuição de Poisson como Aproximação da Binomial

- **Comentários:**

a) O teorema diz que poderemos obter uma aproximação das probabilidades binomiais com as probabilidades da distribuição de Poisson, toda vez que n seja grande e p seja pequeno.

b) Já verificamos que se X tiver uma distribuição binomial, $E(X) = np$, enquanto se X tiver uma distribuição de Poisson (com parâmetro α), $E(X) = \alpha$.

8.2 A Distribuição de Poisson como Aproximação da Binomial

- **Comentários (final):**

c) A distribuição binomial é caracterizada por dois parâmetros, *n* e *p*, enquanto a distribuição de Poisson é caracterizada por um único parâmetro, $\alpha = np$, o qual representa o número esperado de sucessos por unidade de tempo (ou por unidade de espaço em alguma outra situação). Esse parâmetro é também conhecido como a intensidade da distribuição.

d) Poderemos também considerar o seguinte raciocínio para avaliarmos a variância de uma variável aleatória de Poisson X, com parâmetro α. X pode ser considerado como um caso limite de uma variável aleatória distribuída binomialmente Y, com parâmetros *n* e *p*, em que $n \to \infty$ e $p \to 0$, de modo que $np \to \alpha$. Assim, no limite $V(X) = np(1-p) \to \alpha$.

8.3 O Processo de Poisson

- **Distribuição de Poisson:**

  A distribuição de Poisson foi empregada na seção anterior como um recurso de aproximação de uma distribuição conhecida, ou seja, a binomial. No entanto, a distribuição de Poisson representa um modelo probabilístico adequado para um grande número de fenômenos observáveis.

- **Exemplo:**

  Consideremos uma fonte de material radioativo, que emita partículas α.

  Seja X_t definido como o número de partículas emitidas durante um período especificado de tempo $[0, t)$.

  A variável aleatória X_t assim definida, pode tomar os valores 0, 1, 2, ... Seja $p_n(t) = P[X_t = n]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

8.3 O Processo de Poisson

- **Hipóteses:**

A_1: O número de partículas emitidas durante intervalos de tempo não-sobrepostos constituem variáveis aleatórias independentes.

A_2: Se X_t for definida como acima, e se Y_t for igual ao número de partículas emitidas durante $[t_1, t_1+t)$, então, para qualquer $t_1 > 0$, as variáveis aleatórias X_t e Y_t terão a mesma distribuição de probabilidade (i.e., a distribuição do número de partículas emitidas durante qualquer intervalo depende apenas do seu comprimento).

A_3: $p_1(\Delta t)$ será aproximadamente igual a $\lambda\Delta t$, se for Δt for suficientemente pequeno, em que λ é uma constante positiva (i.e., se o intervalo for suficientemente pequeno, a probabilidade de obter exatamente uma emissão durante o intervalo é diretamente proporcional ao seu comprimento).

A_4: $\sum_{k=2}^{\infty} p_k(\Delta t) \to 0$ (i.e., a probabilidade de obter duas ou mais emissões durante um intervalo suficientemente pequeno é despresível).

A_5: $X_0 = 0$, ou equivalentemente, $p_0(0) = 1$ (isto equivale a uma condição inicial para o modelo).

8.3 O Processo de Poisson

- **Exemplo (final):**

  Mostra-se, então, que o número de partículas emitidas durante o intervalo de tempo [0, t) por uma fonte radioativa, sujeita às hipóteses feitas acima, é uma variável aleatória, com ***distribuição de Poisson***, com parâmetro (λt), ou seja:

$$p_n(t) = P\left[X_t = n\right] = \frac{e^{-(\lambda t)}\left(\lambda t\right)^n}{n!}, n = 0, 1, 2, \ldots.$$

- **Comentários:**

a) A distribuição de Poisson surge como uma consequência de algumas hipóteses feitas, o que significa que sempre que tais hipóteses forem válidas (ao menos aproximadamente), a distribuição de Poisson pode ser empregada com um modelo adequado.

b) Se X_t possuir uma distribuição de Poisson com parâmetro dependente de *t*, tal coleção (infinita) de variáveis aleatórias é também conhecida como ***Processo de Poisson***.

8.4 A Distribuição Geométrica

- **Definição:**

  Suponha que realizemos um experimento ε e que estejamos interessados apenas na ocorrência ou não ocorrência de algum evento A, que realizemos ε repetidamente, que as repetições sejam independentes e que permaneçam constantes as probabilidades P(A) = p e $P(\bar{A}) = q = (1-p)$. Defina-se a variável aleatória X como o número de repetições necessárias para obter a primeira ocorrência de A, nele se incluindo essa última. Teremos

  $$P(X = k) = q^{k-1}p, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

  Uma variável aleatória com a distribuição de probabilidade acima recebe a denominação de ***distribuição geométrica***.

8.4 A Distribuição Geométrica

- **Teorema:**

  Se X tiver uma distribuição geométrica, então

  $E(X) = 1/p$ e

  $V(X) = q/p^2$.

- **Comentário:**

  O fato de E(X) ser igual ao inverso de p é aceito intuitivamente, porque diz que pequenos valores de $p = P(A)$ exigem muitas repetições a fim de permitir que A ocorra.

8.4 A Distribuição Geométrica

- **Teorema II:**

  Suponha-se que X tenha uma distribuição geométrica. Então, para quaisquer inteiros positivos *s* e *t*,

  $P(X \geq s+t \mid X > s) = P(X > t)$.

- **Demonstração:**

  Deixada como exercício.

- **Comentários:**

a) O teorema afirma que a distribuição geométrica 'não possui memória', no sentido seguinte. Suponha-se que o evento A não tenha ocorrido durante as primeiras *s* repetições de ε. Então, a probabilidade de que ele não ocorra durante as próximas *t* repetições será a mesma probabilidade de que não tivesse ocorrido durante as primeiras *t* repetições. Em outras palavras, a informação de nenhum sucesso é 'esquecida', no que interessa aos cálculos subsequentes.

b) A recíproca do teorema é também verdadeira.

c) Conforme será visto, há uma v.a. contínua com propriedade análoga.

8.5 A Distribuição de Pascal

- **Definição:**

  Suponha-se que um experimento seja continuado até que um evento particular A ocorra pela *r*-ésima vez.

  Se P(A) = *p*, P(Ā) = *q* = (1-*p*), em cada repetição, e definirmos a variável aleatória Y como sendo o número de repetições necessárias a fim de que A possa ocorrer exatamente *r* vezes, temos que

$$P(Y=k)=\binom{k-1}{r-1}p^r q^{k-r},\ k=r,r+1,\ldots.$$

- **Comentário:**

  A distribuição de Pascal é também conhecida como ***Distribuição Binomial Negativa***.

8.5 A Distribuição de Pascal

- **Teorema:**

  Se Y tiver uma distribuição de Pascal, então

  $E(Y) = r/p$ e

  $V(Y) = rq/p^2$.

- **Comentário:**

  Para calcular E(Y) e V(Y) poderemos desenvolver os somatórios ou simplesmente considerar as variáveis aleatórias Z_i, definida como sendo o número de repetições entre a $(i$-1)-ésima ocorrência de A até a i-ésima ocorrência de A, que são variáveis aleatórias com distribuição geométrica.

  Como $Y = Z_1 + \ldots + Z_r$, segue que

  $E(Y) = E(Z_1) + \ldots + E(Z_r) = r/p$ e

  $V(Y) = V(Z_1) + \ldots + V(Z_r) = rq/p^2$.

8.6 Relação entre as Distribuições Binomial e de Pascal

- **Relação entre as Distribuições Binomial e de Pascal:**

  Suponhamos que X tenha distribuição binomial com parâmetros *n* e *p* (i.e., X é o número de sucessos em *n* provas repetidas de Bernoulli com probabilidade de sucesso *p*). Suponhamos que Y tenha uma distribuição de Pascal com parâmetros *r* e *p* (i.e., Y é o número de provas Bernoulli necessárias para obter *r* sucessos, com probabilidade de sucesso *p*). Então valem as seguintes relações:

a) $P(Y \leq n) = P(X \geq r)$

b) $P(Y > n) = P(X < r)$

- **Demonstração:**

a) Se ocorrerem *r* ou mais sucessos nas primeiras *n* provas repetidas, $(X \geq r)$, então serão necessárias *n* ou menos provas para obter os primeiros *r* sucessos, $(Y \leq n)$.

b) Se ocorrerem menos de *r* sucessos nas primeiras *n* provas, $(X < r)$, então será preciso mais do que *n* provas para obter *r* sucessos, $(Y > n)$.

8.7 A Distribuição Hipergeométrica

- **Definição:**

  Suponha-se que tenhamos um lote de N peças, *r* das quais sejam defeituosas e (N-*r*) das quais sejam não-defeituosas. Suponha-se que escolhamos ao acaso *n* peças desse lote ($n \leq$ N), sem reposição. Seja X o número de peças defeituosas encontradas.

  Desde que X = *k* se, e somente se, obtivermos exatamente *k* peças defeituosas (dentre as *r* defeituosas do lote) e exatamente (*n*-*k*) não-defeituosas, teremos

$$P(X = k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \ k = 0,1,2,\ldots$$

  Diz-se que uma variável aleatória que tenha tal distribuição de probabilidade tem ***distribuição hipergeométrica***.

8.7 A Distribuição Hipergeométrica

- **Comentário:**

  Visto que $\binom{a}{b} = 0$, sempre que $b > a$, se a e b forem inteiros não-negativos, poderemos definir as probabilidades acima para todo $k = 0, 1, \ldots$.

  Não poderemos, obviamente, obter mais do que r peças defeituosas e devemos associar probabilidade zero a esse evento.

8.7 A Distribuição Hipergeométrica

- **Teorema:**

  Admita-se que X tenha distribuição hipergeométrica. Façamos $p = r/N$, $q = 1-p$. Nesse caso, teremos

a) $E(X) = np$;

b) $V(X) = npq(N-n)/(N-1)$;

c) $P(X = k) \approx \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, para N grande.

- **Demonstração:**

  Deixada como exercício.

- **Comentário:**

  A propriedade (c) afirma que se o tamanho do lote N for suficientemente grande, a distribuição de X poderá ser aproximada pela distribuição binomial.

  O valor $(N-n)/(N-1)$ é um ‘fator de correção’ para população finita e é aproximadamente igual a 1, para N grande.

8.8 A Distribuição Multinomial

- **Definição:**

  Considere-se um experimento ε, seu espaço amostral S, e a partição de S em k eventos mutuamente excludentes $A_1, \ldots, A_k$, (i.e., quando ε for realizado, um, e somente um, dos eventos A_i ocorrerá). Considerem-se n repetições de ε.

  Seja $p_i = P(A_i)$ e suponha-se que p_i permaneça constante durante todas as repetições.

  Definam-se as variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_k$ como sendo o número de vezes que A_i ocorre nas n repetições de ε, $i = 1, 2, \ldots, k$.

- **Observação:**

  Note que os X_i não são independentes. Como $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$, assim que (k-1) dessas variáveis sejam conhecidas, o valor da k-ésima ficará automaticamente determinado.

8.8 A Distribuição Multinomial

- **Teorema:**
  Se X_i, i = 1, 2, ..., k, forem definidas como anteriormente, teremos

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \ldots, X_k = n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!} p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}, \text{ em que } \sum_{i=1}^{k} n_i = n.$$

- **Demonstração:**
  O raciocínio é idêntico àquele empregado para estabelecer a distribuição de probabilidade binomial, com a observação de que o número de maneiras de arranjar n objetos, n_i dos quais de uma i-ésima espécie, é dado por

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}.$$

- **Comentários:**

a) Se k = 2, a distribuição reduz-se à distribuição binomial.

b) A distribuição acima é conhecida como a ***distribuição de probabilidade multinomial*** (ou polinomial).

8.8 A Distribuição Multinomial

- **Teorema II:**

  Suponha-se que $(X_1,...,X_k)$ tenha uma distribuição multinomial. Nesse caso,

  $$E(X_i) = np_i$$

  e

  $$V(X_i) = np_i(1-p_i),\ i = 1, 2, ..., k.$$

- **Demonstração:**

  Isto é uma consequência imediata da observação de que cada X_i, como anteriormente definido, tem uma distribuição binomial, com a probabilidade de sucesso (i.e., a ocorrência de A_i) igual a p_i.