11 Aplicações à Teoria da Confiabilidade

ESQUEMA DO CAPÍTULO

11.1 Conceitos Fundamentais

- Suponha-se que estejamos considerando um componente o qual é submetido a alguma espécie de ***esforço***.
- Suponha-se que, para qualquer um desses componentes, um estado que denotaremos como ***falha*** possa ser definido.
- Se esse componente for posto sob esforço em um instante $t = 0$, e observado até que falhe, a ***duração até falhar*** ou ***duração da vida***, T, pode ser considerada como uma variável aleatória contínua com alguma fdp f.
- O emprego de um modelo probabilístico, com T considerada como uma variável aleatória, parece constituir-se no único tratamento ***realista*** do assunto.

11.1 Conceitos Fundamentais

- **Definição:**

  A ***confiabilidade*** de um componente (ou sistema) na época t, R(t), é definida como

  $$R(t) = P(T \geq t),$$

  em que T é a duração da vida do componente. R é denominada ***função de confiabilidade***.

- **Comentário:**

  A definição simplesmente afirma que a confiabilidade de um componente é igual à probabilidade de que o componente não venha a falhar durante o intervalo [0, t].

  Em termos de fdp de T, f, teremos

  $$R(t) = \int_t^{\infty} f(s)ds.$$

  Em termos da fd de T, F, teremos

  $$R(t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - F(t).$$

11.1 Conceitos Fundamentais

- **Definição:**

  A ***taxa de falhas*** (instantânea) Z (algumas vezes denominada ***função de risco***) associada à variável aleatória T é dada por

  $$Z(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}.$$

  definida para F(t) < 1.

- **Comentário:**

  A fim de interpretar Z(t), considere-se a probabilidade condicionada

  $$P = P(t \leq T \leq t + \Delta t |\ T > t).$$

  Temos então

  $$P = \frac{P(t < T \leq t + \Delta t)}{P(T > t)} = \int_t^{t+\Delta t} f(x)dx / P(T > t) = \Delta t f(\xi) / R(t),$$

  com $t \leq \xi \leq t + \Delta t$. A última expressão é aproximadamente igual a $\Delta t Z(t)$, explicando não formalmente que $\Delta t Z(t)$ representa a proporção de peças que falharão entre t e $t + \Delta t$, dentre as que ainda funcionavam na época t.

11.1 Conceitos Fundamentais

- **Teorema:**

  Se T, a duração até falhar, for uma variável aleatória contínua, com fdp *f* e se F(0) = 0, em que F é a fd de T, então *f* poderá ser expressa em termos da taxa de falhas Z, da seguinte maneira

$$f(t) = Z(t)e^{-\int_0^t Z(s)ds}.$$

- **Demonstração:**

  Visto que R(*t*) = 1 - F(*t*), teremos R′(*t*) = -F′(*t*) = -f(*t*). Daí

$$Z(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{-R'(t)}{R(t)}.$$

11.1 Conceitos Fundamentais

- **Demonstração (final):**

Integrando ambos os lados de 0 a *t*

$$\int_0^t Z(s)ds = -\int_0^t \frac{R'(s)}{R(s)} ds = -\ln R(t) + \ln R(0) = -\ln R(t),$$

desde ln R(0) = 0, que vale se, e somente se, R(0) = 1 (satisfeita, pois F(0) = 0, isto é, a probabilidade de falha inicial é zero). Consequentemente,

$$R(t) = e^{-\int_0^t Z(s)ds}.$$

Portanto

$$f(t) = F'(t) = \frac{d}{dt}[1 - R(t)] = Z(t)e^{-\int_0^t Z(s)ds}.$$

Assim, mostramos que a taxa de falhas Z determina univocamente *f*.

11.1 Conceitos Fundamentais

- Existe uma interessante relação entre a função de confiabilidade e a duração média até falhar, E(T).
- **Teorema II:**

  Se E(T) for finita, então

$$E(T) = \int_0^\infty R(t)dt.$$

- **Demonstração (deixada como exercício):**

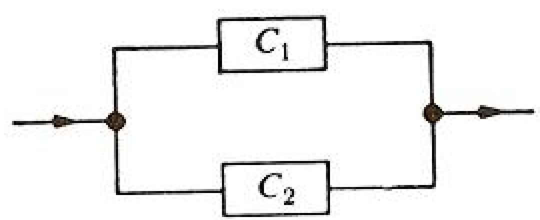
  Pode ser obtida da integração por partes de:

$$\int_0^\infty R(t)dt = \int_0^\infty \left[\int_t^\infty f(s)ds \right] dt, \text{fazendo } \int_t^\infty f(s)ds = u \text{ e } dt = dv.$$

11.1 Conceitos Fundamentais

- Os conceitos de confiabilidade e de taxa de falhas estão entre as mais **importantes** ferramentas necessárias para um estudo profundo dos modelos de falhas. Estudaremos principalmente as seguintes questões:
  a) Que leis de falhas subjacentes será razoável admitir?
  b) Suponha-se que temos dois componentes, C1 e C2, com leis de falhas conhecidas. Suponha-se que esse componentes estejam associados em série

ou em paralelo



para constituir um sistema.
Qual será a lei de falhas (ou confiabilidade) do sistema?

11.2 A Lei de Falhas Normal

- Existem muitos tipos de componentes cujo comportamento das falhas pode ser representado pela ***distribuição normal***. Isto é, se T for a duração da vida de uma peça, sua fdp será dada por

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{t-\mu}{\sigma}\right]^2\right).$$

- Sua função de confiabilidade pode ser expressa em termos da função de distribuição acumulada normal, tabulada, Φ, da seguinte maneira

$$R(t)=P(T>t)=1-P(T\le t)$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{t}\exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right)dx=1-\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right).$$

11.2 A Lei de Falhas Normal

- **Exemplo:**

  Suponha-se que a duração da vida de um componente seja distribuída normalmente, com desvio-padrão igual a 10 h. Se o componente tiver uma confiabilidade de 0,99 para um período de operação de 100 h, qual será sua duração de vida esperada?

- **Solução:**

  A equação anterior se torna

  $R(t) = 0{,}99 = 1 - \Phi[(100-\mu)/10].$

  Das tábuas da distribuição normal, temos

  $0{,}99 = 1 - \Phi[-2{,}33].$

  Logo, $(100-\mu)/10 = -2{,}33$, e, portanto, $\mu = 123{,}3$ h.

- **Comentário:**

  A lei de falhas normal representa um modelo apropriado para componentes nos quais há efeito de ***desgaste***. Ela ***não*** se inclui, contudo, entre as mais importantes leis de falhas encontradas.

11.3 A Lei de Falhas Exponencial

- **Teorema:**

  Seja T, a duração até falhar, uma variável aleatória contínua, que tome todos os valores não-negativos. Então, T terá uma distribuição exponencial se, e somente se, tiver uma taxa de falhas constante.

- **Comentário:**

  A hipótese de falhas constante pode também significar que, depois que a peça estiver em uso, sua probabilidade de falhar não se tenha alterado. Dizendo de maneira menos rigorosa, não existe efeito de desgaste quando o modelo exponencial é estipulado.

  Se T, a duração até falhar, for distribuída exponencialmente (com parâmetro α), teremos

  $f(t) = \alpha e^{-\alpha t},\ t > 0,$

  $\mathrm{R}(t) = \int_t^{\infty} f(x)dx = e^{-\alpha t},$

  $\mathrm{Z}(t) = f(t)/\mathrm{R}(t) = \alpha e^{-\alpha t}/e^{-\alpha t} = \alpha.$

11.4 A Lei de Falhas Exponencial e a Distribuição de Poisson

- Existe uma conexão muito íntima entre a lei de falhas exponencial e um processo de Poisson.

  Suponha-se que a falha ocorra em virtude do aparecimento de certas perturbações aleatórias.

  Seja X_t igual ao número de tais perturbações ocorridas durante um intervalo de tempo t, e admita-se que X_t, $t \geq 0$ constitua um processo de Poisson, com parâmetro αt.

  Suponha que a falha durante $[0,t]$ seja causada se, e somente se, ao menos uma dessas perturbações ocorrer. Então

  $$F(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T > t).$$

  Ora, $T > t$ se, e somente se, não ocorrer nenhuma perturbação durante $[0,t]$. Isso acontecerá se, e somente se, $X_t = 0$. Por isso

  $$F(t) = 1 - P(X_t = 0) = 1 - e^{-\alpha t},$$

  que representa a fd de uma lei de falhas exponencial.

11.5 A Lei de Falhas de Weibull

- Vamos modificar a noção de taxa de falhas constante. Suponha-se que a taxa de falhas Z, associada a T, a duração da vida de uma peça, tenha a seguinte forma

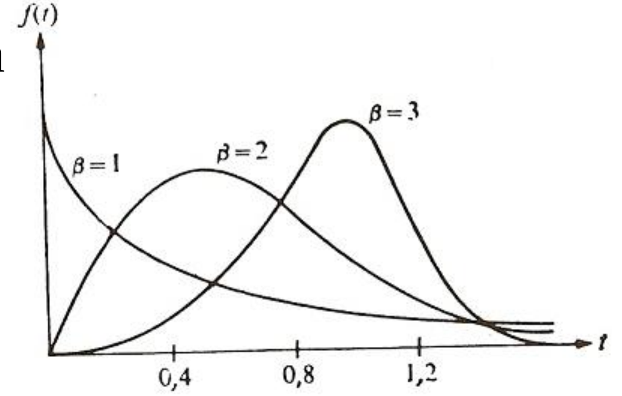
  $Z(t) = (\alpha\beta)t^{\beta-1}$,

  em que α e β são constantes positivas.

  Podemos então obter a seguinte expressão para a fdp de T, da equação que relaciona $f(t)$ e $Z(t)$

$$f(t) = Z(t)e^{-\int_0^t Z(s)ds} = (\alpha\beta)t^{\beta-1}e^{-\alpha t^{\beta}}, t > 0, \alpha, \beta > 0.$$

  Diz-se que a respectiva variável aleatória tem distribuição Weibull (ver figura).



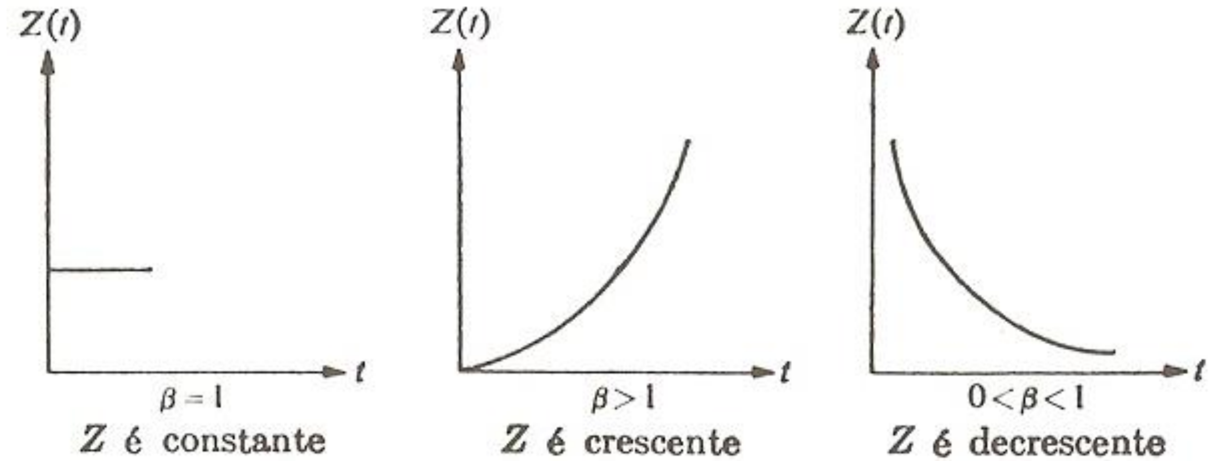
11.5 A Lei de Falhas de Weibull

- **Comentário:**

  A distribuição exponencial é um caso particular da distribuição de Weibull, já que se fizermos $\beta = 1$ então obteremos uma taxa de falhas constante, $Z(t) = \alpha$.

  Outro exemplo, se $\beta = 2$, Z será uma função linear de t, $Z(t) = (2\alpha)t$.

  Desse modo, Z será uma função crescente, decrescente ou constante de t, dependendo do valor de β, como indicado na figura.



11.6 Confiabilidade de Sistemas

- Agora, nos dedicaremos à segunda questão proposta na Sec. 11.1, qual seja avaliar a confiabilidade de um sistema, conhecida a confiabilidade de seus componentes.
- Suponha-se que dois componentes estejam montados em ***série***:

Isto significa que, a fim de que o sistema funcione, ambos os componentes deverão funcionar.

- **Teorema I:**

Se n componentes, que funcionem independentemente, forem montados em série, e se o i-ésimo componente tiver confiabilidade $R_i(t)$, então a confiabilidade do sistema completo, $R(t)$, será dada por

$$R(t) = R_1(t) \ldots R_n(t).$$

11.6 Confiabilidade de Sistemas

- **Teorema II:**

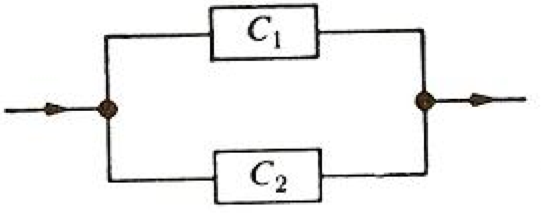
  Se dois componentes, que funcionem independentemente e tenha leis de falhas exponenciais, com parâmetros α_1 e α_2, forem montados em *série*, a lei de falhas do sistema resultante será também exponencial com parâmetro igual a $\alpha_1 + \alpha_2$.

  Evidentemente, este teorema pode ser generalizado para *n* componentes exponenciais em série, resultando em um sistema exponencial com parâmetro igual a $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$.

11.6 Confiabilidade de Sistemas

- Outro sistema importante é o sistema em ***paralelo***, no qual os componentes são ligados de tal maneira que o sistema deixa de funcionar somente se todos os componentes falharem.

  Suponha apenas dois componentes incluídos, assim, temos



- **Teorema III:**

  Se n componentes, que funcionem independentemente, estiverem operando em paralelo, e se o i-ésimo componente tiver confiabilidade $R_i(t)$, então a confiabilidade do sistema, $R(t)$, será dada por

$$R(t) = 1 - [1 - R_1(t)] \ldots [1 - R_n(t)].$$

11.6 Confiabilidade de Sistemas

- **Observação:**

  A operação em ***série*** é, frequentemente, ***obrigatória*** (isto é, alguns componentes devem funcionar a fim de que o sistema funcione).

  Por outro lado, empregamos muitas vezes uma operação em ***paralelo*** de modo a ***aumentar a confiabilidade*** do sistema.

  Na figura, vemos as curvas de confiabilidade para a unidade isolada, com $R(t) = e^{-\alpha t}$, e para as três unidades iguais, em paralelo, $R(t)=1-(1-e^{-\alpha t})^3$, com $\alpha = 0{,}01$.