12 Soma de Variáveis Aleatórias

ESQUEMA DO CAPÍTULO

12.1 Introdução

- Tornaremos mais precisas nesse capítulo algumas ideias ***superficialmente*** mencionadas em todo texto.
- A saber, à medida que o número de repetições de um experimento cresce, a frequência relativa f_A de algum evento A ***converge*** (em um sentido probabilístico a ser explicado) para a probabilidade teórica P(A).
- Este fato nos permite ***identificar*** a frequência relativa de um evento, $f_A = n/N$, baseada em um grande número de repetições, N, com a probabilidade do evento, P(A).

12.2 A Lei do Grande Números

- **A Lei dos Grandes Números (Formulação de Bernoulli):**
  Seja E um experimento e seja A um evento associado a E.
  Considerem-se n repetições independentes de E, seja n_A o número de vezes em que A ocorra nas n repetições, e façamos $f_A = n_A/n$.
  Seja P(A) = p (a qual se admite seja a mesma para todas as repetições).
  Então, para todo número positivo ε, teremos

$$\text{Prob}\left[\left| f_A - p \right| \geq \varepsilon\right] < \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2},$$

ou equivalentemente

$$\text{Prob}\left[\left| f_A - p \right| < \varepsilon\right] \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

12.2 A Lei do Grande Números

- **Demonstração:**

  Seja n_A o número de vezes que o evento A ocorra. Esta é uma variável aleatória binomialmente distribuída.

  Então $E(n_A) = np$ e $V(n_A) = np(1-p)$. Porém, $f_A = n_A/n$ e, por isso, $E(f_A) = p$ e $V(f_A) = np(1-p)/n^2$.

  Aplicando a desigualdade de Tchebycheff à variável aleatória , obteremos

$$P\left[\left| f_A - p \right| < k\sqrt{p(1-p)/n}\right] \geq 1 - \frac{1}{k^2}.$$

  Seja $\varepsilon = k\sqrt{p(1-p)/n}$. Logo, $k^2 = (n\varepsilon^2)/[p(1-p)]$, e, por isso

$$P\left[\left| f_A - p \right| < \varepsilon\right] \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

12.2 A Lei do Grande Números

- **Comentários:**

a) O resultado acima pode ser enunciado de muitas maneiras equivalentes. É evidente que isto acarreta imediatamente que

$$\lim_{n\to\infty} P[|f_A - p| < \varepsilon] = 1, \text{ para todo } \varepsilon > 0.$$

É nesse sentido que dizemos que a frequência relativa f_A ***converge*** para P(A).

b) É importante salientar a diferença entre a convergência referida acima (denominada ***convergência em probabilidade***) e o tipo de convergência frequentemente mencionada em Cálculo Infinitesimal.

Quando dizemos que $f_A = n_A/n$ converge para P(A), queremos dizer que a probabilidade do evento

$$\{|n_A/n - P(A)| < \varepsilon\}$$

pode se tornar arbitrariamente próxima da unidade, ao se tomar n suficientemente grande.

12.2 A Lei do Grande Números

- **Comentários (final):**

c) Ainda outra forma da Lei dos Grandes Números é obtida quando fazemos a seguinte pergunta. Quantas repetições de E devemos realizar, a fim de termos uma probabilidade de ao menos 0,95, para que a frequência relativa $f_A = n_A/n$ difira de p = P(A) por menos do que, digamos, 0,01?

Isto é, para ξ = 0,01, desejamos escolher n, de modo que $1 – p(1-p)/(n\times0{,}01)^2 = 0{,}95$.

Substituindo os valores específicos de 0,05 e 0,01 por δ e ε, respectivamente, teremos

$$P[|f_A-p| < \varepsilon] \geq 1 - \delta, \text{ sempre que } n \geq p(1-p)/(\varepsilon^2\delta).$$

Devemos salientar que ao tomar-se $n \geq p(1-p)/(\varepsilon^2\delta)$, nada se garante quanto a $|f_A-p|$, a não ser que se torna provável que $|f_A-p|$ venha a ser muito pequeno.

12.2 A Lei do Grande Números

- **Exemplo:**

  Quantas vezes deveremos ensaiar um dado equilibrado, de maneira a ficarmos ao menos 95% certos de que a frequência relativa de tirarmos um seis fique a menos de 0,01 da probabilidade teórica, 1/6?

  Aqui, $p = 1/6$, $1\text{-}p = 5/6$, $\varepsilon = 0{,}01$ e $\delta = 0{,}05$. Portanto, da relação acima, encontramos que

  $$n \geq (1/6)(5/6)/(0{,}01^2 0{,}05) \approx 27.778.$$

- **Comentários:**

a) Recordemo-nos que f_A é uma ***variável aleatória*** e não apenas um valor observado. Se realmente jogarmos um dado 27.778 vezes, e depois calcularmos a frequência relativa de tirarmos um seis, este número estará ou não a menos de 0,01 de 1/6. O essencial é que, se fôssemos jogar um dado 27.778 em 100 ocasiões, em cerca de 95 dessas ocasiões a frequência relativa estaria a menos de 0,01 de 1/6.

12.2 A Lei do Grande Números

- **Comentários (final):**

b) Em muitos problemas, não conhecemos o valor de p = P(A) e, por isso, não poderemos empregar o limite n anteriormente descrito.

Nesse caso, poderemos empregar o fato de que $p(1-p)$ toma seu valor máximo (pior valor) quando $p = ½$, e esse valor máximo é ¼.

Consequentemente, estaremos certamente do lado seguro se afirmarmos que para

$$n \geq 1/(4\varepsilon^2\delta)$$

teremos

$$P[|f_A - p| < \varepsilon] \geq 1 - \delta.$$

12.3 Aproximação Normal da Distribuição Binomial

- Se X tiver uma distribuição binomial com parâmetros *n* e *p*, e se

$$Y = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}},$$

então, para *n* grande, Y terá uma distribuição aproximadamente N(0,1), no sentido de que

$$\lim_{n\to\infty} P[Y \le y] = \Phi(y).$$

Esta aproximação será válida para valores de $n > 10$, desde que *p* seja próximo de ½. Se *p* for próximo de 0 ou 1, *n* deverá ser maior, para garantir uma boa aproximação.

- **Comentário:**

Este resultado têm grande importância prática, pois significa que poderemos empregar a distribuição normal, tabulada extensivamente, para avaliar probabilidades que surjam da distribuição binomial.

12.4 O Teorema do Limite Central

- **Teorema do Limite Central:**

  Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$, uma sequência de n variáveis aleatórias independentes, com $E(X_i) = \mu_i$ e $V(X_i) = \sigma_i^2$, $i = 1,2,\ldots,n$.

  Façamos $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

  Então, sob determinadas condições gerais (não enunciadas), teremos que

$$Z_n = \frac{X - \sum_{i=1}^{n} \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}},$$

  tem aproximadamente a distribuição N(0,1).

12.5 Outras Distribuições Aproximadas pela Distribuição Normal: a de Poisson, a de Pascal e a Gama

a) A Distribuição de Poisson:

Conforme mencionado anteriormente, uma variável aleatória de Poisson surge quando estivermos interessados no número total de ocorrências de algum evento, em um intervalo de tempo. Se considerarmos esse número de ocorrências como a ***soma*** das ocorrências em intervalos menores não-imbricados, tornaremos possível a aplicação dos resultados da seção anterior.

b) A distribuição de Pascal:

Uma variável aleatória com distribuição de Pascal também pode ser vista como a ***soma*** de r variáveis aleatórias independentes, cada uma com distribuição geométrica. Nesse caso, para r suficientemente grande, os resultados da seção anterior também se aplicam.

c) A distribuição Gama:

Uma variável aleatória que tenha distribuição Gama (com parâmetros α e r) poderá ser representada com a ***soma*** de r variáveis aleatórias independentes exponencialmente distribuídas. Portanto, para r grande, também é aplicável o Teorema do Limite Central.

12.6 A Distribuição da Soma de um Número Finito de Variáveis Aleatórias

- Do Teorema do Limite Central, podemos concluir que, para n grande, a soma de n variáveis aleatórias é aproximadamente normalmente distribuída.
- Qual será a distribuição desta soma, quando n não seja suficientemente grande para justificar o emprego do Teorema do Limite Central?
- **Teorema:**

  Suponha-se que X e Y sejam variáveis aleatórias independentes, contínuas, com fdp g e h, respectivamente. Seja Z = X + Y e denotemos a fdp de Z por s. Então

$$s(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(w)h(z-w)dw.$$