PROVA DE ESTATÍSTICA – MESTRADO/UFMG - 2003

Instruções para a prova:

(a) Cada questão respondida corretamente vale 1 ponto.
(b) Questões deixadas em branco valem zero pontos (nesse caso marque todas as alternativas).
(c) Cada questão respondida incorretamente vale −1 ponto.
(d) A nota total será dada a partir da pontuação acima.

(1) Um posto de gasolina possui quatro frentistas. A chefia determinou, como cortesia aos clientes, que os frentistas lavem o vidro para-brisas de todos os carros atendidos pelo posto. João, que atende a 20% de todos os carros, se esquece de lavar para-brisas à taxa de 1 a cada vinte carros; Mario, Pedro e Joaquim atendem, respectivamente, 60, 15 e 5 por cento dos carros que chegam ao posto, e falham na lavagem de para-brisas à taxas de 1 para 10, 1 para 10 e 1 para 20, respectivamente. Se um freguês reclama que o para-brisas de seu carro não foi lavado, qual a probabilidade de que o carro tenha sido atendido por João?
(a) 0.005
(b) 0.200
(c) 0.050
(d) 0.114

(2) Quando mensagens são enviadas, por vezes ocorrem erros na transmissão. Em particular, o código Morse usa pontos "." e traços "-" na construção de uma mensagem. Sabe-se que a cada sete sinais enviados, três são pontos. Suponha que há interferência na transmissão de uma mensagem, e com probabilidade 1/8 um ponto seja erroneamente recebido como se fosse um traço, e vice-versa. Se um ponto foi recebido, quão certos podemos estar de que um ponto foi enviado?
(a) 0.125
(b) 0.840
(c) 0.446
(d) 0.428

(3) Duas lâmpadas ruins são misturadas com duas lâmpadas boas. As lâmpadas são testadas uma a uma, até que duas ruins sejam encontradas. Qual a probabilidade de que a última ruim seja encontrada no:
(i) Segundo teste.
(ii) Terceiro teste.
(ii) Quarto teste.

(a) Respectivamente, 1/6, 1/3, 1/2
(b) Respectivamente, 1/6, 1/6, 1/6
(c) Respectivamente, 1/4, 1/4, 1/16
(d) Respectivamente, 1/4, 1/2, 1/8

(4) Classifique como verdadeiro ou falso.
(i) Se $P(A|B) \geq P(A)$ então $P(B|A) \geq P(B)$.
(ii) Se $P(B|A^c) = P(B|A)$, então A e B são independentes.
(iii) Se $a=P(A)$ e $b=P(B)$, então $P(A|B) \geq (a+b-1)/b$.

(a) Respectivamente, F,F,F
(b) Respectivamente, V,V,V
(c) Respectivamente, V,F,V
(d) Respectivamente, F,F,V

(5) Classifique como verdadeiro ou falso.

Considere o quadro abaixo representando a distribuição conjunta de X e Y e admita que X e Y são independentes.

X \Y	1	2	3	P(X)
1	0,08			
2				
3				0,3
P(Y)	0,20		0,50	

(i) P(X=2;Y=3) = 0.15.
(ii) A esperança de Y dado que X=2 é 4,8.
(iii) Seja Z=4X-3Y, a esperança de Z é 3,2.

(a) Respectivamente, F,F,F
(b) Respectivamente, V,V,V
(c) Respectivamente, V,F,F
(d) Respectivamente, F,F,V

(6) Considere n repetições independentes de um experimento, cada uma com os possíveis resultados $s_1,...,s_{k+1}$. Seja p_j a probabilidade de ocorrência de s_j, e seja X_j o número das n repetições do experimento resultando em s_j, j=1,...,k+1. Agora denote por $Z_{j\alpha}$ a variável binária que toma valor um quando a α-ésima repetição resulta em s_j e zero em caso contrário. Deste modo,

$$X_j = \sum_{\alpha=1}^{n} Z_{j\alpha}$$

Então a covariância entre X_i e X_j é:
(a) zero
(b) $np_i(1-p_j)$
(c) $-np_ip_j$
(d) np_ip_j

(7) Para testar a hipótese de que uma moeda é honesta, adotou-se a seguinte regra de decisão: Não rejeitar a hipótese nula (H_0: p=0,5), se o número de caras, em uma amostra de 100 lances estiver entre 40 e 60, inclusive; caso contrário rejeitá-la.

Qual a probabilidade de ser rejeitada a hipótese, quando ela for correta?

(a) 0.9544
(b) 0.0456
(c) 0.9772
(d) 0.0228

(8) Considerando a situação descrita na questão (7), que conclusões se pode tirar do fato da amostra de 100 lances apresentar 53 caras? E 61 caras?

(a) Não rejeita-se Ho em ambos os casos.
(b) Rejeita-se Ho no primeiro caso, mas não no segundo.
(c) Não rejeita-se Ho no primeiro caso, mas rejeita-se no segundo.
(d) Nenhuma das opções acima.

(9) Considerando a situação descrita na questão (7), qual a probabilidade de rejeição da moeda ser honesta, quando a probabilidade de caras for p=0,7?
(a) 0.0146
(b) 0.9988
(c) 0.0012
(d) 0.9854

(10) Considere o experimento em que dois grupos de ratos (fêmeas) foram alimentados com dietas apresentando alto e baixo conteúdo de proteína. O quadro abaixo fornece valores de estatísticas-resumo de interesse. Admita que a variável de interesse segue o modelo normal.

Grupo	Tamanho amostral	Média Amostral	Desvio-padrão amostral
Alto conteúdo de proteína	12	120,0	21,39
Baixo conteúdo de proteína	07	101,0	20,62

O objetivo do estudo é testar se as duas dietas são equivalentes (hipótese nula - Ho) ou não (hipótese alternativa - Ha). O teste estatístico a ser utilizado para esta finalidade deve ser:

(a) Um teste Z (normal) para a comparação de duas amostras independentes com mesma variância, e rejeita-se a hipótese Ho ao nível de 10% de significância.

(b) Um teste t-student para a comparação de duas amostras independentes com mesma variância, e rejeita-se a hipótese Ho ao nível de 10% de significância.

(c) Um teste Z (normal) para a comparação de duas amostras relacionadas, rejeita-se a hipótese Ho ao nível de 5% de significância.

(d) Um teste t-student para a comparação de duas amostras relacionadas, e rejeita-se a hipótese Ho ao nível de 5% de significância.

(e) Nenhuma das opções anteriores.

(11) Seja o modelo de regressão linear simples $Y_i = \beta_o + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$, onde $\varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2)$ e considere que ε_i e ε_j são não correlacionados quando $i \neq j$, e $i,j=1,2,...,n$. Seja $\hat{Y}_i$ o valor predito de Y_i e dado por $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_o + \hat{\beta}_1 X_i$, onde os estimadores de β_o e β_1 são os usuais. Seja $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$. Verifique se as seguinte afirmações são verdadeiras:

$$a) \sum_{i=1}^{n} e_i = 0 \qquad\qquad b) \sum_{i=1}^{n} X_i e_i = 0$$

(a) Respectivamente, F,F
(b) Respectivamente, V,F
(c) Respectivamente, F,V
(d) Respectivamente, V,V

(12) Duas pessoas combinam que vão chegar independentemente uma da outra em um restaurante, em horários aleatórios uniformemente distribuídos entre 12:00h e 13:00h. É acertado que, ao chegar, cada pessoa espere no máximo 15 minutos pela outra para almoçarem juntas. Se findo esse prazo a outra pessoa não comparecer, ela deverá ir embora, e não há encontro. Qual é a probabilidade de que elas almocem juntas?
a) 3/16
b) 1/4
c) 1/3
d) 3/8
e) 7/16

(13) Um saco contém três moedas quase idênticas, sendo que uma delas tem duas caras e as outras duas são moedas normais. Duas moedas são retiradas simultaneamente ao acaso do saco e lançadas, obtendo-se uma cara e uma coroa. Qual é a probabilidade de que a moeda de duas caras tenha ficado no saco?
a) 1/4
b) 1/3
c) 1/2
d) 2/3
e) 1

(14) Quatro cartas diferentes devem ser colocadas em quatro envelopes com endereços diferentes. Uma secretária distraída coloca aleatoriamente uma carta em cada envelope. Qual é a probabilidade de que pelo menos uma carta esteja no envelope correto?
a) 1/6
b) 1/4
c) 3/8
d) 5/8
e) 3/4

(15) Em um estudo sobre a população de esquilos de um parque na Inglaterra, uma certa área foi dividida em 30 quadrados de 1 *m* de lado. Em cada quadrado contou-se o número X de indivíduos. Os resultados são mostrados na tabela a seguir

Número esquilos por quadrado (k)	0	1	2	3	4	≥5	total
Número observado de quadrados com k esquilos	16	09	03	01	01	00	30

Verifique se as seguinte afirmações são verdadeiras:

(i) A taxa média de esquilos por quadrado é 0,55.
(ii) Imagine um modelo estatístico que poderia descrever adequadamente estes dados. Considerando este modelo, a frequência esperada de quadrados com dois esquilos é 3,85.

(a) Respectivamente, F,F
(b) Respectivamente, V,F
(c) Respectivamente, F,V
(d) Respectivamente, V,V