

Marcela Marques dos Reis

Percolação de longo alcance em grafos
hierárquicos

Belo Horizonte
2015

Marcela Marques dos Reis

Percolação de longo alcance em grafos hierárquicos

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, para a obtenção de Título de Mestre em Estatística.

Orientador: Roger William Câmara Silva.
Coorientador: Rémy de Paiva Sanchis.

Belo Horizonte
2015

Aluno, Marcela M. R.

Percolação de longo alcance em grafos hierárquicos

91 páginas

Dissertação (Mestrado) - Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais. Departamento de Estatística.

1. Percolação de longo alcance
2. Ergodicidade
3. Renormalização

I. Universidade Federal de Minas Gerais. Instituto de Ciências Exatas. Departamento de Estatística.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr.
Bernardo Nunes Borges de Lima

Prof. Dr.
Wagner Barreto de Souza

Prof. Dr.
Rogério Gomes Alves

Prof. Dr.
Roger William Câmara Silva

Prof. Dr.
Rémy de Paiva Sanchis

À minha família, meu bem mais precioso: César, Carlos, Malvina e Gabriel.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Carlos e Malvina, por me incentivarem desde pequena a estudar, por me darem amor incondicional, carinho, confiança em todos os momentos da minha vida. Esse trabalho é para vocês e é uma conquista essencialmente suas. Vocês são exemplos de pais, de pessoas e de marido e esposa. Meu irmão querido, Gabriel, obrigada por sempre me apresentar livros, tecnologias, fazer de mim uma pessoa curiosa e persistente. Você me mostra a cada dia que é preciso ir atrás dos nossos sonhos para viver feliz. Amo vocês!

Ao meu amado marido e melhor amigo, César. Obrigada pela felicidade que você me proporciona, pelo amor, pelo seu companheirismo. Obrigada por me entender e por me levantar toda vez que me senti fraca e incapaz. Sou muito grata por ter conhecido alguém tão especial.

Aos meus melhores amigos e em especial à Dani, Ka, Thatha, Thiago's, Priscila, Bruno, Sarah e Cláudio (amigos que minha família me proporcionou), Lí, Rama, Verdinha, Fran, Jack. Vocês são essenciais para mim. Aos meus amigos do mestrado: Rachel, Luiza, Lívia, Larissa, Juliane, Renata, Maurício e Fabrícia. Obrigada por tornarem o curso mais divertido e leve, vocês estarão sempre em meu coração.

Agradeço aos professores do Departamento de Estatística, Denise e Sokol, pelo conhecimento que vocês me proporcionaram, em especial ao Wagner, por ter aceitado o convite de avaliar meu trabalho e sugerir alterações construtivas. Ao Roger, meu orientador. Você cumpriu verdadeiramente seu papel, você me orientou! Você me ensinou, respeitou e compreendeu meus limites acadêmicos. É um exemplo de profissional e pessoa para mim e esse trabalho também é uma conquista sua. Foi muito rico o tempo

que estudamos juntos. Muito obrigada!

Aos professores do Departamento de Matemática por terem contribuído de forma rica na minha formação. Obrigada Rémy, por ter aceitado o convite de ser meu orientador, pelo esforço e por dedicar seu tempo, mesmo que curto, para me ajudar. Obrigada ao Bernardo, exemplo de professor, e ao Rogério por terem aceitado o convite de participarem da banca.

Finalmente, obrigada ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Nessa dissertação será apresentado de forma minuciosa o modelo de percolação estudado no artigo *Long-range percolation on the hierarchical lattice* [18] dos autores Koval, Meester e Trapman. No modelo de percolação de longo alcance em grafos hierárquicos, quaisquer dois vértices podem estar conectados por um elo com probabilidade $1 - \exp\{-\alpha\beta^{-k}\}$, em que α e β são parâmetros do modelo e k é a distância entre os vértices. Essa distância depende de um parâmetro inteiro $N \geq 2$ que define a hierarquia no grafo. Dada uma configuração $\omega \in \Omega$ de elos que estão abertos ou não no grafo, é possível estudar o aglomerado aberto da origem $\mathcal{C}(0; \omega)$, isto é, o conjunto de vértices que estão conectados a origem por um caminho de elos abertos. A probabilidade do aglomerado aberto da origem ter tamanho infinito é denotada por $\theta(\alpha, \beta)$. Os principais resultados encontrados pelos autores e as explicações detalhadas das provas dos teoremas se encontram nos Capítulos de 2 a 6. Dentre eles estão a transição de fase do modelo, a unicidade do aglomerado aberto infinito e a continuidade das funções $\theta(\alpha, \beta)$ e $\alpha_c(\beta) := \inf\{\alpha; \theta(\alpha, \beta) > 0\}$.

Palavras-chave: Percolação de longo alcance, ergodicidade, renormalização.

Abstract

In this dissertation the percolation model of the article *Long-range percolation on the hierarchical lattice* [18] by Koval, Meester and Trapman will be presented in detail. In the long-range percolation model, any two vertices may be connected by an edge with probability $1 - \exp\{-\alpha\beta^{-k}\}$, where α and β are parameters of the model and k is the distance between the vertices. This distance will depend on an integer parameter $N \geq 2$ which defines the hierarchy on the model. Given a configuration $\omega \in \Omega$ of edges that are open or not on the lattice, it is possible to study the open cluster of the origin $\mathcal{C}(0; \omega)$, i.e., the set of vertices that are connected to the origin by an open path. The probability that the open cluster of the origin is infinite is denoted by $\theta(\alpha, \beta)$. The main results of the paper [18] and detailed explanations of proofs of theorems are in Chapters 2 to 6. Among them are the phase transition of the model, the uniqueness of the infinite cluster and continuity of functions $\theta(\alpha, \beta)$ and $\alpha_c(\beta) := \inf\{\alpha; \theta(\alpha, \beta) > 0\}$.

Keywords: Long-range percolation, ergodicity, renormalisation.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	O modelo de percolação em \mathbb{Z}^d	3
1.2	Percolação de longo alcance em grafos hierárquicos	9
2	Transição de fase	19
2.1	Demonstração da parte (a)	19
2.2	Demonstração da parte (c)	20
2.3	Demonstração da parte (b)	23
3	Unicidade do aglomerado aberto infinito	34
4	Lei dos grandes números para θ	43
5	Continuidade de θ	58
6	Continuidade de $\alpha_c(\beta)$	69
A	Teoria Ergódica - Conceitos Básicos	76
B	Processo de Ramificação	79
C	Desigualdades Importantes	82
C.1	Comparação entre Bernoulli's	82

C.2	Comparação entre Poisson's	83
C.3	Desigualdade de Bernoulli	84
C.4	Cauda Binomial	85
C.5	Desigualdades Exponenciais	87
Referências Bibliográficas		89

Capítulo 1

Introdução

Percolação é o fenômeno da passagem de um fluido por um meio poroso. Esse fluido pode filtrar ou extrair do meio algum tipo de substância. O primeiro trabalho publicado sobre percolação utilizando modelos matemáticos foi feito por Broadbent e Hammersley [5] na década de 1950. Um dos objetivos de Broadbent e Hammersley era estudar com qual probabilidade a água chega ao centro de uma grande rocha porosa quando essa rocha é mergulhada em água. A formalização matemática deste problema será vista na Seção 1.1.

A partir da publicação de Broadbent e Hammersley surgiram diversos outros trabalhos de percolação em outros modelos. O artigo *Long-range percolation on the hierarchical lattice* [18], objeto deste estudo, foi publicado por Vyacheslav Koval, Ronald Meester e Pieter Trapman. O objetivo desta dissertação é apresentar de forma detalhada o modelo de percolação de longo alcance em grafos hierárquicos [18]. Os resultados que serão apresentados nos Capítulos de 2 a 6 já foram demonstrados pelos autores do artigo, mas nesse trabalho serão explicadas de forma mais detalhada as demonstrações dos teoremas.

O estudo do modelo de percolação de longo alcance em grafos hierárquicos foi inspirado em pesquisas de epidemia em populações. A população obedece uma hierarquia

que é construída a partir de um valor inteiro $N \geq 2$ fixo. Nesse modelo, há possibilidade de contaminação entre quaisquer dois indivíduos, mas a probabilidade de transmissão da doença depende da distância entre eles e um surto da doença na população pode ser interpretado como a ocorrência de percolação.

Outros modelos de percolação de longo alcance também foram usados para estudar epidemias. Athreya e Swart [2], por exemplo, apresentaram em seu artigo um processo de contato construído no grupo hierárquico Ω_N , conjunto de vértices também utilizado nesta dissertação. Em [2], a probabilidade de infecção também depende da distância entre os indivíduos, esta também é a mesma distância definida na Seção 1.2. Mas Athreya e Swart [2] levam em consideração a cura de um indivíduo que antes estava infectado, com uma probabilidade fixa.

Trapman em [29] estudou um modelo de percolação de longo alcance que também pode ser utilizado em estudos de epidemia. O processo de percolação em [29] pode ser aplicado em modelos de epidemia espaciais do tipo SIR. Nesse tipo de modelo, o indivíduo pode passar por três estágios: suscetível (S), infectado (I) e depois removido (R).

Paralelo ao estudo feito em [18], Dawson e Gorostiza [8] também estudaram o modelo de percolação de longo alcance no grafo hierárquico de ordem N que será explicado na Seção 1.2. Eles chegaram a alguns resultados semelhantes aos encontrados por Koval, Meester e Trapman, mas utilizaram métodos diferentes de estudo.

Na Seção 1.2 será apresentado o modelo do artigo [18] e a partir do Capítulo 2 os resultados e suas demonstrações.

Contudo, antes de começar a se falar do modelo de Koval, Meester e Trapman, na próxima seção será apresentado o modelo de percolação em \mathbb{Z}^d que foi estudado por Broadbent e Hammersley.

1.1 O modelo de percolação em \mathbb{Z}^d

Como dito anteriormente, Broadbent e Hammersley [5] formalizaram o problema de passagem de fluido por um meio poroso. Na rocha existem poros e canais por onde passa a água. Um canal pode estar aberto, possibilitando a passagem de água para outro poro, ou fechado. Esse meio poroso pode ser modelado por um grafo $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$, em que \mathbb{Z}^d é o conjunto de sítios, representando os poros da rocha, e $\mathbb{E}^d = \{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{Z}^d : \|x - y\|_1 = 1 \}$ o conjunto de elos, que são os canais por onde a água passaria. A norma $\|x - y\|_1$ é a distância euclidiana entre os sítios x e y . Com um certo abuso de notação, o grafo $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$ será referido simplesmente como \mathbb{Z}^d .

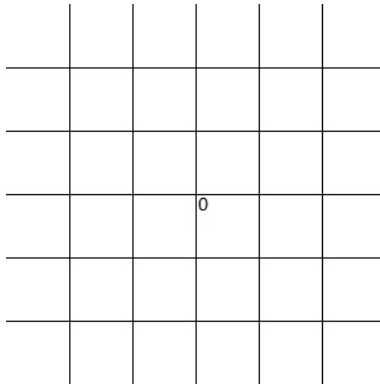


Figura 1.1: Grafo $(\mathbb{Z}^2, \mathbb{E}^2)$

Cada elo deste grafo, independente dos demais, está aberto com probabilidade p ou fechado com probabilidade $1 - p$, onde $0 \leq p \leq 1$ é um parâmetro do modelo. Formalmente, define-se uma família de variáveis aleatórias independentes $\{\omega_e \mid e \in \mathbb{E}^d\}$ onde $\omega_e = 1$ se o elo e estiver aberto e $\omega_e = 0$ se o elo e estiver fechado. Deste modo, as variáveis aleatórias ω_e têm distribuição Bernoulli com parâmetro p . O espaço de probabilidade desse modelo é a tripla $(\Omega, \mathcal{E}, P_p)$, onde $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{E}^d}$. Um elemento de Ω será denotado por $\omega = \{\omega_e : e \in \mathbb{E}^d\}$ e chamado de configuração.

A σ -álgebra \mathcal{E} desse modelo é chamada a σ -álgebra gerada pelos eventos cilíndricos. Sua construção é feita da seguinte forma. Considere os subconjuntos de Ω :

$$C(j, a_0, \dots, a_n) = \{\omega \in \Omega; \omega_{e_{j+i}} = a_i, 0 \leq i \leq n, a_i \in \{0,1\}\}.$$

Esses subconjuntos são chamados *cilindros*. Esses cilindros finito-dimensionais formam uma semi-álgebra que denotaremos por \mathcal{S} . Para todo cilindro $C(j, a_0, \dots, a_n) \in \mathcal{S}$ definimos uma medida $\mu : \mathcal{S} \rightarrow [0,1]$, tal que

$$\mu(C(j, a_0, \dots, a_n)) = \prod_{i; a_i=1} p \prod_{i; a_i=0} (1-p).$$

A σ -álgebra deste modelo será $\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{S})$, ou seja, a menor σ -álgebra gerada pela semi-álgebra \mathcal{S} . Segundo o Teorema de Extensão de Hahn-Kolmogorov (ver Teorema A.2), existe uma única medida de probabilidade $P_p : \mathcal{E} \rightarrow [0,1]$ que estende μ . Essa extensão é tal que $P_p(A) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{S}$. Fica definido assim o espaço de probabilidade deste modelo.

Dado uma configuração ω em Ω , introduziremos agora a noção de conexão entre vértices de \mathbb{Z}^d . As definições desses termos são importantes para o estudo da probabilidade de percolação e elas serão dadas a seguir:

Definição 1.1.1 *Um caminho é um conjunto de elos (e_1, e_2, \dots, e_n) em \mathbb{E}^d , com $e_i = \langle x_i, y_i \rangle$, onde $x_i, y_i \in \mathbb{Z}^d$, tal que $x_i \neq x_j$ para todo $i \neq j$ e $y_i = x_{i+1}$ para todo $i = 1, \dots, n-1$. Um caminho será dito aberto se todos os seus elos estiverem abertos.*

Definição 1.1.2 *Dois vértices $x, y \in \mathbb{Z}^d$ estão conectados se existir um caminho aberto (e_1, e_2, \dots, e_n) , onde $e_i = \langle x_i, y_i \rangle$, tal que $x = x_1, y = y_n$ e $y_i = x_{i+1}$ para todo $i = 1, \dots, n-1$. O evento em que x está conectado a y é denotado por $\{x \leftrightarrow y\}$.*

Definição 1.1.3 *O aglomerado (ou cluster) aberto de x na configuração ω , denotado por $\mathcal{C}(x, \omega)$, é o conjunto formado por todos os pontos que estão conectados a x na configuração $\omega \in \Omega$, isto é, $\mathcal{C}(x, \omega) = \{y \in \mathbb{Z}^d \mid y \leftrightarrow x \text{ em } \omega \in \Omega\}$.*

Calcular a probabilidade de percolação nesse modelo é calcular a probabilidade do aglomerado aberto de x ter tamanho infinito. Porém, considerando a invariância translacional do grafo $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$ e da medida P_p , a distribuição da cardinalidade do aglomerado de x é a mesma que da cardinalidade do aglomerado da origem. Portanto, os estudos sobre a probabilidade de percolação são baseados apenas no tamanho do aglomerado da origem, que será aqui denotado por \mathcal{C} .

Definindo a função $\theta(p) : [0,1] \mapsto [0,1]$ dada por $\theta(p) := P_p(\omega \in \Omega : |\mathcal{C}(\omega)| = \infty)$, observa-se que se $p = 0$, então todos os elos estão fechados quase certamente, portanto $\theta(p) = 0$. Por outro lado, se $p = 1$, todos os elos estarão abertos quase certamente, assim $\theta(p) = 1$. É bastante intuitivo a propriedade de que $\theta(p)$ é não decrescente em relação a p . O aumento no valor de p sugere um acréscimo no número de elos abertos, assim também há um aumento do comprimento e do número de caminhos abertos que partem da origem.

Para provar essa propriedade formalmente, utilizaremos a técnica de acoplamento que será explicada a seguir. Considere $\{U(e) : e \in \mathbb{E}^d\}$ uma família de variáveis aleatórias independentes em que cada $U(e)$ tem distribuição Uniforme $[0,1]$. A ideia do acoplamento é unir todos os processos de percolação em $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$, varrendo todos os valores possíveis de p . Então considere $0 \leq p \leq 1$ e defina η_p como:

$$\eta_p(e) = \begin{cases} 1 & \text{se } U(e) < p, \\ 0 & \text{se } U(e) \geq p. \end{cases}$$

O vetor aleatório η_p tem componentes independentes com distribuições marginais dadas por:

$$P(\eta_p(e) = 0) = 1 - p \text{ e } P(\eta_p(e) = 1) = p.$$

O elo e será dito p -aberto se $\eta_p(e) = 1$ e dito p -fechado se $\eta_p(e) = 0$. Observe que se $p_1 \leq p_2$, o elo e ser p_1 -aberto implica que e também é p_2 -aberto. Assim, para todo

$e \in \mathbb{E}^d$, $\eta_{p_1}(e) \leq \eta_{p_2}(e)$. Observando os dois processos de percolação em $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$, o conjunto de elos abertos no processo com parâmetro p_1 está contido no conjunto de elos abertos do processo com parâmetro p_2 . Com isso, concluímos que o evento de interesse $\{|\mathcal{C}| = \infty\}$ é crescente, isto é, $\eta_{p_1} \in \{|\mathcal{C}| = \infty\}$ implica que $\eta_{p_2} \in \{|\mathcal{C}| = \infty\}$, demonstrando que $\mathbb{P}_{p_1}(|\mathcal{C}| = \infty) \leq \mathbb{P}_{p_2}(|\mathcal{C}| = \infty)$ sempre que $p_1 \leq p_2$.

Como consequência da propriedade de que $\theta(p)$ é não decrescente em p , faz sentido pensar em um valor crítico para p tal que a função $\theta(p)$ deixa de ser zero e esse valor será denotado por p_c . Definimos assim $p_c := \inf\{p : \theta(p) > 0\}$. Alguns resultados importantes sobre a função $\theta(p)$ podem ser encontrados em [11], entre eles o fato de $\theta(p)$ ser contínua, exceto possivelmente em $p = p_c$. O primeiro teorema importante sobre o valor de p_c é o seguinte:

Teorema 1.1 *Para $d \geq 2$, existe um valor crítico do parâmetro p , denominado p_c , no intervalo $(0,1)$ tal que:*

$$\theta(p) \begin{cases} = 0 & \text{se } p < p_c \\ > 0 & \text{se } p > p_c. \end{cases}$$

A princípio o ponto crítico p_c poderia ser igual a 0 ou 1. Entretanto, o que esse teorema garante é que $p_c \in (0,1)$, embora ele não dê nenhuma informação sobre o que ocorre a $\theta(p)$ quando $p = p_c$. A demonstração desse teorema e dos próximos que serão citados podem ser encontrados em [11].

Como dito anteriormente, foi provado que $\theta(p)$ é contínua, exceto possivelmente em $p = p_c$. O teorema seguinte garante que em \mathbb{Z}^2 a função $\theta(p)$ é contínua inclusive quando $p = p_c$. Sua demonstração original foi dada por Harry Kesten em 1980 [17], que construiu a prova a partir de trabalhos anteriores dos autores Harris [15], Russo [26] e Seymour, Welsh [27].

Teorema 1.2 *Em duas dimensões, $p_c = \frac{1}{2}$ e $\theta(p_c) = 0$.*

Na década de 1990, Takashi Hara e Gordon Slade [[13], [14]] provaram que θ é contínua em p_c se d for suficientemente grande, mais precisamente se $d \geq 19$.

Definindo $\psi(p) := P_p(\omega \in \Omega : \exists \text{ aglomerado aberto infinito em } \omega)$, tem-se o seguinte resultado.

Teorema 1.3 *Para o modelo de percolação em \mathbb{Z}^d , temos*

$$\psi(p) = \begin{cases} 1 & \text{se } \theta(p) > 0 \\ 0 & \text{se } \theta(p) = 0. \end{cases}$$

Demonstração: O evento $\{|\mathcal{C}| = \infty\}$ implica na existência do aglomerado infinito, ou seja, $\{|\mathcal{C}| = \infty\} \subset \{\exists \text{ aglomerado aberto infinito em } \omega\}$ e, portanto, $\psi(p) \geq \theta(p)$. Assim, se $\theta(p) > 0$, tem-se $\psi(p) > 0$. Contudo $\{\exists \text{ aglomerado aberto infinito em } \omega\}$ é um evento caudal, ou seja, não depende do estado de um número finito de elos. Utilizando a Lei 0-1 de Kolmogorov, esse evento tem probabilidade 0 ou 1 de ocorrer. Sendo assim, se $\theta(p) > 0 \Rightarrow \psi(p) = 1$. Por outro lado, sabe-se que

$$\{\exists \text{ aglomerado aberto infinito em } \omega\} = \cup_{x \in \mathbb{Z}^d} \{|\mathcal{C}(x, \omega)| = \infty\}.$$

Utilizando a invariância translacional e supondo que $\theta(p) = 0$, temos

$$\begin{aligned} \psi(p) &= P_p(\cup_{x \in \mathbb{Z}^d} \{|\mathcal{C}(x, \omega)| = \infty\}) \\ &\leq \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} P(|\mathcal{C}(x, \omega)| = \infty) \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} P(|\mathcal{C}(\omega)| = \infty) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto $\psi(p) = 0$ se $\theta(p) = 0$. □

Sabe-se também que se existir aglomerado aberto infinito na configuração ω ele é único, isto é, considerando a variável aleatória $M : \Omega \mapsto \mathbb{N}$ que representa o número de aglomerados abertos infinitos, tem-se o seguinte resultado.

Teorema 1.4 *No modelo de percolação em \mathbb{Z}^d , considere a variável aleatória M definida anteriormente. Então,*

$$P_p(\omega \in \Omega : M(\omega) = 0 \text{ ou } 1) = 1.$$

A demonstração desse teorema pode ser vista em Burton, Keane [6]. Outro teorema interessante diz respeito ao tamanho médio do aglomerado da origem. Definindo $\chi_p := E_p(|\mathcal{C}|)$, em que E_p é a esperança com relação à medida P_p , tem-se o seguinte resultado.

Teorema 1.5 *Para o modelo de percolação em Z^d , seja $\chi_p := E_p(|\mathcal{C}|)$. Temos que $\chi_p < \infty$ se, e somente se, $p < p_c$.*

Observe que $\chi_p = \sum_{n=1}^{\infty} nP(|\mathcal{C}| = n) + \infty \cdot \theta(p)$. Logo se $p > p_c$, tem-se que $\theta(p) > 0$ e, conseqüentemente, $\chi_p = \infty$. Essa última observação mostra a primeira implicação do teorema anterior, ou seja, que $\chi_p < \infty \Rightarrow p < p_c$. A prova da segunda implicação requer o resultado do Teorema 1.6, cuja demonstração pode ser vista nos artigos de Menshikov [23] e Aizenman, Barsky [1].

Teorema 1.6 *(Decaimento exponencial) Se $p < p_c$, existe $\alpha > 0$ tal que $P_p(|\mathcal{C}| \geq n) \leq e^{-\alpha n}$.*

Como $\sum_{n=1}^{\infty} nP(|\mathcal{C}| = n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(|\mathcal{C}| \geq n)$, pelo Teorema 1.6, se $p < p_c$, então $\theta(p) = 0$ e existirá $\alpha > 0$ tal que $\chi_p \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha n} < \infty$, implicando na volta do Teorema 1.5.

1.2 Percolação de longo alcance em grafos hierárquicos

Nesta seção será feito um estudo aprofundado sobre o modelo do artigo *Long-range percolation on the hierarchical lattice* [18] de Vyacheslav Koval, Ronald Meester e Pieter Trappman.

O artigo foi inspirado em modelos de epidemia. A população em um modelo clássico de epidemia se comporta da seguinte forma: um indivíduo infectado pode transmitir a doença para qualquer outro indivíduo da população e sempre com a mesma probabilidade de transmissão. Em [9], Diekmann e Heesterbeek estudaram esse tipo de modelo.

Neste trabalho vamos estudar um modelo que considera uma hierarquia na população que depende de um parâmetro inteiro $N \geq 2$. A probabilidade de um indivíduo infectar o outro depende da distância entre eles que é determinada nessa hierarquia.

O diagrama de fases da epidemia pode ser relacionado a um modelo de percolação. A existência de um aglomerado aberto infinito será interpretado como um surto da doença na população. Nesta seção será construído o grafo e o modelo de percolação estudado por Koval, Meester e Trapman [18]. O conjunto de vértices e a métrica são definidos a seguir.

Definição 1.2.1 *Considere $N \geq 2$ inteiro. O conjunto de vértices é definido como $\Omega_N = \{(x_1, x_2, \dots) : x_i \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}, \sum_{i=1}^{\infty} x_i < \infty\}$.*

Como $\sum_{i=1}^{\infty} x_i < \infty$, Ω_N é enumerável e podemos rotular os vértices de Ω_N através da seguinte função.

$$f : \Omega_N \rightarrow \mathbb{N}$$

$$f(x_1, x_2, \dots) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i N^{i-1}. \quad (1.1)$$

Algumas vezes utilizaremos o número natural n para representar o elemento

$f^{-1}(n) \in \Omega_N$. Para $N = 2$, por exemplo, o vértice $(1,0,0,1,0,0,\dots) \in \Omega_2$ é representado pelo número natural 9 pois

$$f(1,0,0,1,0,0,\dots) = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^3 = 9.$$

A seguir será introduzida uma métrica em Ω_N .

Definição 1.2.2 *Sejam $x = (x_1, x_2, \dots)$ e $y = (y_1, y_2, \dots) \in \Omega_N$. A distância entre x e y é definida como:*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ \max\{i : x_i \neq y_i\} & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

O par (Ω_N, d) é chamado de grafo hierárquico de ordem N . O conjunto de todos os elos do modelo será denotado por \mathbb{E} .

Para entender melhor a métrica definida anteriormente considere $N = 2$ e os seguintes vértices $x = (0, 1, 0, 0, 0, \dots)$ e $y = (0, 0, 1, 0, 0, \dots)$. A distância entre eles é $d(x, y) = 3$. Podemos pensar nos vértices do grafo hierárquico como os ramos de uma árvore regular sem raiz, veja a Figura 1.2 para o caso $N = 2$. Nesse caso, a métrica deve ser interpretada como o número de gerações até o primeiro ancestral comum.

Note que a distância entre os vértices $(1, 0, 0, 0, 0, \dots)$ e $(0, 1, 0, 0, 0, \dots)$, que estão representados na Figura 1.2 como 1 e 2, respectivamente, é 2 e a distância entre 1 e 4 ou 2 e 4 é três.

De fato, a função $d = d(x, y)$ definida em $d : \Omega_N \times \Omega_N \rightarrow \mathbb{N}$ é uma métrica pois:

- (i) $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in \Omega_N$, por definição;
- (ii) d é simétrica, ou seja, dados $x, y \in \Omega_N$, tem-se que $d(x, y) = d(y, x)$;
- (iii) Como será provado a seguir, d satisfaz a desigualdade $d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(y, z)\}$ para todo x, y e $z \in \Omega_N$, logo d satisfaz a desigualdade triangular;

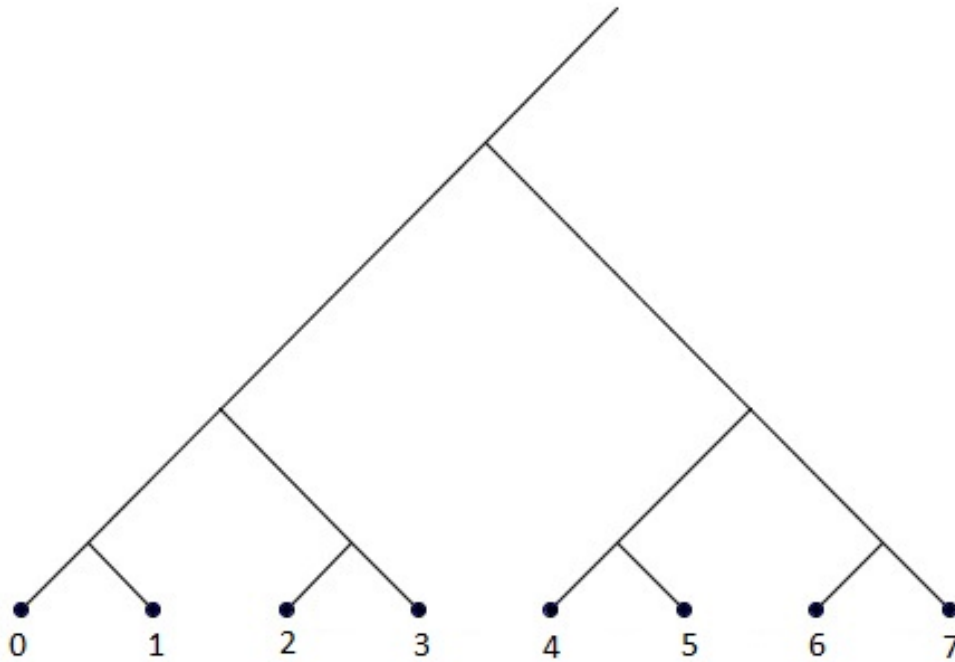


Figura 1.2: Árvore que representa a métrica para $N = 2$.

(iv) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Os itens (i), (ii) e (iv) seguem facilmente da definição da função d . A demonstração do item (iii) pode ser vista na proposição abaixo. Observe que (iii) implica na desigualdade triangular.

Proposição 1.2.1 *Sejam quaisquer três vértices $x = (x_1, x_2, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots)$ e $z = (z_1, z_2, \dots)$ pertencentes a Ω_N . Então:*

$$d(x,y) \leq \max\{d(x,z), d(z,y)\}$$

Demonstração:

Considere três vértices x , y e z distintos, os outros casos são imediatos. Note que para todo $i > d(x,z)$ tem-se $x_i = z_i$. Por definição, se $d(x,z) \geq d(z,y)$, então para todo

$i > d(x, z)$ tem-se $y_i = z_i$. Logo, $d(x, z) \geq d(x, y)$, ou seja, $d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$.

□

Denote por $\mathcal{B}_r(x)$ a bola de raio r e centro em x . As bolas nesse grafo tem importantes propriedades que irão ajudar muito nas demonstrações dos teoremas.

Propriedades: Sejam $x, y \in \Omega_N$. Então:

1. $\mathcal{B}_r(x)$ contém N^r vértices;
2. Há $(N - 1)N^{k-1}$ vértices a distância k de x .
3. Se $y \in \mathcal{B}_r(x)$ então $\mathcal{B}_r(x) = \mathcal{B}_r(y)$.
4. Para todo $r \geq 0$ se tem $\mathcal{B}_r(x) = \mathcal{B}_r(y)$ ou $\mathcal{B}_r(x) \cap \mathcal{B}_r(y) = \emptyset$.

Demonstração:

1. A bola $\mathcal{B}_r(x)$ contém todos os vértices que estão a distância menor ou igual a r de x , então pela Definição 1.2.2, dado um vértice $y \in \mathcal{B}_r(x)$, $\max\{i : x_i \neq y_i\} \leq r$. Logo, há N opções de algarismo para a posição $i = 1$, assim como há N opções de algarismo para a posição $i = 2$ e seguindo este raciocínio, haverá N^r opções para preencher as primeiras r coordenadas de y . Logo, a bola $\mathcal{B}_r(x)$ contém N^r vértices.
2. Seja $y \in \Omega_N$ tal que $d(x, y) = k$, ou seja, $\max\{i : x_i \neq y_i\} = k$. Usando o mesmo raciocínio do item anterior, haverá N^{k-1} opções de algarismo para preencher as $k - 1$ primeiras coordenadas de y . Já a k -ésima coordenada de x deve ser diferente da k -ésima coordenada de y , logo há $N - 1$ opções para completar esta posição. Concluindo assim que há $(N - 1)N^{k-1}$ vértices a distância k de x .
3. Suponha que $y, z \in \mathcal{B}_r(x)$. Então $d(x, y) \leq r$ e $d(x, z) \leq r$. Pela Proposição 1.2.1, $d(y, z) \leq \max\{d(x, y), d(x, z)\} \leq r$, o que implica $z \in \mathcal{B}_r(y)$, ou seja,

$\mathcal{B}_r(x) \subset \mathcal{B}_r(y)$. De forma análoga, prova-se que $\mathcal{B}_r(y) \subset \mathcal{B}_r(x)$.

4. Dado $r \geq 0$, duas coisas podem acontecer: $y \in \mathcal{B}_r(x)$ ou $y \notin \mathcal{B}_r(x)$. No primeiro caso já foi mostrado no item anterior que $\mathcal{B}_r(x) = \mathcal{B}_r(y)$. Porém, caso $y \notin \mathcal{B}_r(x)$, suponha por absurdo que existe $z \in \mathcal{B}_r(x) \cap \mathcal{B}_r(y)$. Como $z \in \mathcal{B}_r(y)$, pela propriedade anterior $\mathcal{B}_r(z) = \mathcal{B}_r(y)$. Da mesma forma, $\mathcal{B}_r(z) = \mathcal{B}_r(x)$. Logo, $\mathcal{B}_r(y) = \mathcal{B}_r(x)$ e $y \in \mathcal{B}_r(x)$. Absurdo. Então somente duas coisas acontecem: $\mathcal{B}_r(x) = \mathcal{B}_r(y)$ ou $\mathcal{B}_r(x) \cap \mathcal{B}_r(y) = \emptyset$.

Agora será introduzida probabilidade no modelo. Cada elo $e = \langle x, y \rangle$, $x, y \in \Omega_N$, independente dos demais, está aberto com probabilidade $p_k := 1 - \exp\{-\alpha\beta^{-k}\}$ e fechado com probabilidade $1 - p_k$, em que $k = d(x, y)$ e $0 \leq \alpha < \infty$ e $0 < \beta < \infty$ são parâmetros do modelo. Formalmente, define-se uma família de variáveis aleatórias independentes $\{\omega_e \mid e \in \mathbb{E}\}$ onde $\omega_e = 1$ se o elo e estiver aberto e $\omega_e = 0$ se o elo e estiver fechado. Deste modo, as variáveis aleatórias ω_e têm distribuição Bernoulli com parâmetro p_k . O espaço de probabilidade desse modelo é a tripla $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_{\alpha, \beta})$, onde $\Omega = \{0, 1\}^{\Omega_N}$ é chamado espaço amostral. Um elemento ω desse espaço amostral será chamado de *configuração*, mais precisamente, $\omega = \{\omega_{\langle x, y \rangle} : x, y \in \Omega_N\}$. \mathcal{F} é a σ -álgebra gerada pelos eventos cilíndricos em Ω que será construída a seguir.

Considere os subconjuntos de Ω :

$$C(j, a_0, \dots, a_n) = \{\omega \in \Omega; \omega_{e_{i+j}} = a_i, 0 \leq i \leq n, a_i \in \{0, 1\}\}.$$

Como já foi dito na Seção 1.1, esses subconjuntos são chamados *cilindros*. Esses cilindros finito-dimensionais formam uma semi-álgebra que denotaremos por \mathcal{S} . Para todo cilindro $C(j, a_0, \dots, a_n) \in \mathcal{S}$ definimos uma medida $\mu_{\alpha, \beta} : \mathcal{S} \rightarrow [0, 1]$, tal que

$$\mu_{\alpha, \beta}(C(j, a_0, \dots, a_n)) = \prod_{i; a_i=1} p_{|e|} \prod_{i; a_i=0} (1 - p_{|e|}),$$

em que $|e|$ é o comprimento do elo $e \in \mathbb{E}$ e $p_{|e|} = 1 - e^{-\alpha\beta^{-|e|}}$. A σ -álgebra deste modelo será $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{S})$, ou seja, a menor σ -álgebra gerada pela semi-álgebra \mathcal{S} . Segundo o Teorema de Extensão de Hahn-Kolmogorov (Teorema A.2), existe uma única medida de probabilidade $\mathbb{P}_{\alpha,\beta} : \mathcal{F} \rightarrow [0,1]$ que estende $\mu_{\alpha,\beta}$. Essa extensão é tal que $\mathbb{P}_{\alpha,\beta}(A) = \mu_{\alpha,\beta}(A)$ para todo $A \in \mathcal{S}$. Assim construímos o espaço de probabilidade deste modelo. A notação utilizada para o operador esperança será $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$.

É importante observar que $p_k = 1 - \exp\{-\alpha\beta^{-k}\}$ é crescente em relação a α e decrescente em relação a β . Nota-se também que quanto mais distante estão os dois vértices, menor a probabilidade do elo que os conecta estar aberto.

Abaixo será estabelecida a noção de conectividade deste modelo.

Definição 1.2.3 *Um caminho é um conjunto de elos (e_1, e_2, \dots, e_n) em \mathbb{E} , com $e_i = \langle x_i, y_i \rangle$, onde $x_i, y_i \in \Omega_N$, tal que $x_i \neq x_j$ para todo $i \neq j$ e $y_i = x_{i+1}$ para todo $i = 1, \dots, n-1$. Um caminho será dito aberto se todos os seus elos estiverem abertos.*

Definição 1.2.4 *Dois vértices $x, y \in \Omega_N$ estão conectados se existir um caminho aberto (e_1, e_2, \dots, e_n) , onde $e_i = \langle x_i, y_i \rangle$, tal que $x = x_1, y = y_n$ e $y_i = x_{i+1}$ para todo $i = 1, \dots, n-1$.*

Sejam $S_1, S_2 \subset \Omega_N$. O evento em que pelo menos um vértice de S_1 está conectado a um vértice de S_2 por um único elo será denotado por $\{S_1 \leftrightarrow S_2\}$. Quando tal evento não ocorre, escrevemos $\{S_1 \nleftrightarrow S_2\}$. Note que ter um caminho entre x e y não significa que $S_1 \leftrightarrow S_2$, mesmo que $x \in S_1$ e $y \in S_2$.

Dado um conjunto $S \subset \Omega_N$, denota-se \bar{S} o conjunto complementar a S , ou seja, $\Omega_N \setminus S$.

Definição 1.2.5 *O aglomerado aberto (ou cluster) de x , denotado por $\mathcal{C}(x, \omega)$, em uma*

configuração ω é o conjunto

$$\mathcal{C}(x, \omega) = \{y \in \Omega_N \mid \text{existe um caminho aberto entre } x \text{ e } y \text{ em } \omega\}.$$

A cardinalidade do aglomerado $\mathcal{C}(x, \omega)$ será denotada por $|\mathcal{C}(x, \omega)|$.

Observe que o grafo deste modelo é invariante por rotações, portanto, estudar a distribuição da cardinalidade de $\mathcal{C}(x, \omega)$ é o mesmo que estudar a distribuição de $|\mathcal{C}(0, \omega)|$. O grafo é invariante pois é sempre possível, através de um mapa, levar um vértice de Ω_N a outro vértice através de rotações respeitando a métrica do grafo. Por exemplo, para o caso $N = 2$, é possível levar o vértice 1 à origem girando no sentido horário o ramo que contém os vértices 0 e 1, no primeiro nível da árvore. Veja esse exemplo na Figura 1.3. Outro exemplo em que podemos ver a invariância do grafo é o mapa que leva o vértice

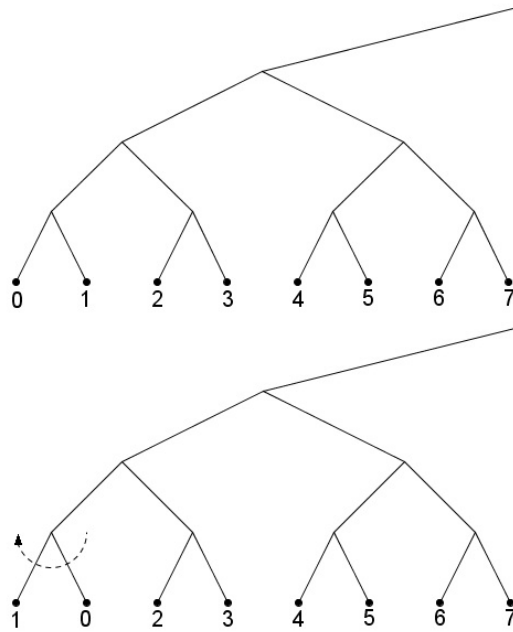


Figura 1.3: Exemplo para o caso $N = 2$, em que é possível levar o vértice 1 à origem.

6 à origem (Figura 1.4). Basta girar no sentido horário o ramo compartilhado pela origem e pelo vértice 7, na terceira geração da árvore, e, em seguida, girar no sentido

horário o ramo formado pelos vértices 6 e 7 no primeiro nível da árvore.

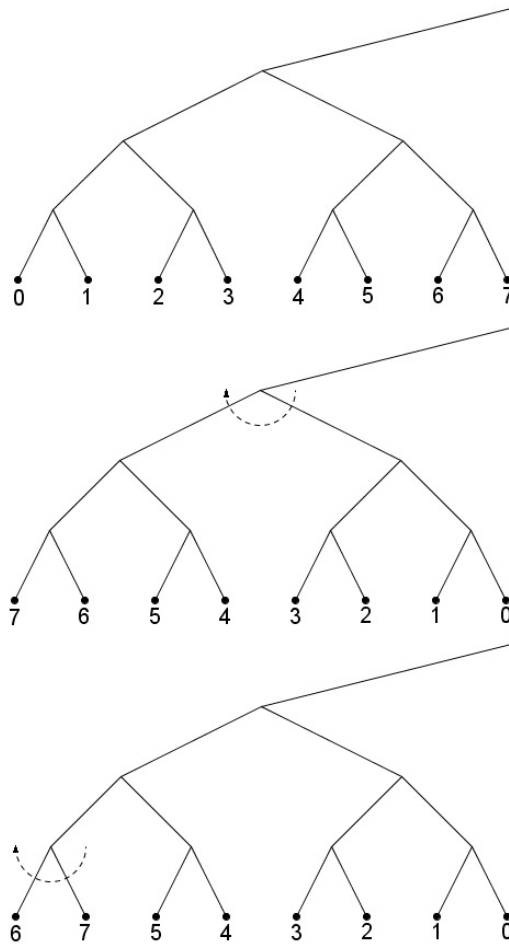


Figura 1.4: Exemplo para o caso $N = 2$, em que é possível levar o vértice 6 à origem.

Denota-se por $\mathcal{C}_n(x, \omega)$ o aglomerado aberto do vértice x restrito à bola $\mathcal{B}_n(x)$. Será chamado de $\mathcal{C}_n^m(x, \omega)$ o maior aglomerado aberto dentro da bola $\mathcal{B}_n(x)$, isto é, $|\mathcal{C}_n^m(x, \omega)| = \max_{y \in \mathcal{B}_n(x)} |\mathcal{B}_n(y)|$. O caso em que há dois ou mais aglomerados de mesmo tamanho e eles são os maiores, um deles será escolhido uniformemente para ser $\mathcal{C}_n^m(x, \omega)$.

A probabilidade do aglomerado aberto da origem ser infinito é denotada por:

$$\theta : [0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$$

$$\theta(\alpha, \beta) := \mathbb{P}_{\alpha, \beta}(\omega \in \Omega : |\mathcal{C}(0, \omega)| = \infty).$$

Esta função é um dos principais objetos de estudo deste trabalho. Será visto, por exemplo, que $\theta(\alpha, \beta)$ é contínua quando $\alpha > 0$. A partir de agora, utilizando um abuso de linguagem, as notações $\mathcal{C}(x, \omega)$, $\mathcal{C}_n(x, \omega)$, $\mathcal{C}_n^m(x, \omega)$ e $\mathbb{P}_{\alpha, \beta}(\omega \in \Omega : |\mathcal{C}(0, \omega)| = \infty)$ serão substituídas respectivamente por $\mathcal{C}(x)$, $\mathcal{C}_n(x)$, $\mathcal{C}_n^m(x)$ e $\mathbb{P}_{\alpha, \beta}(|\mathcal{C}(0)| = \infty)$.

Fixando β , provaremos utilizando a técnica de acoplamento que a função $\theta(\alpha, \beta)$ é não decrescente com respeito a α . De forma semelhante ao que foi feito na Seção 1.1, considere $\{U(\langle x, y \rangle); x, y \in \Omega_N\}$ uma família de variáveis aleatórias Uniformes $[0, 1]$. Seja β fixo e $0 \leq \alpha < \infty$ e defina $\eta_{\alpha, \beta}$ como:

$$\eta_{\alpha, \beta}(\langle x, y \rangle) = \begin{cases} 1 & \text{se } U(\langle x, y \rangle) < p_k^{\alpha, \beta}, \\ 0 & \text{se } U(\langle x, y \rangle) \geq p_k^{\alpha, \beta}, \end{cases}$$

em que $k = d(x, y)$ e $p_k^{\alpha, \beta} = 1 - \exp\{-\alpha\beta^{-k}\}$. Observe que:

$$P(\eta_{\alpha, \beta}(e) = 0) = 1 - p_k^{\alpha, \beta} = \exp\{-\alpha\beta^{-k}\} \text{ e } P(\eta_{\alpha, \beta}(e) = 1) = p_k^{\alpha, \beta} = 1 - \exp\{-\alpha\beta^{-k}\},$$

em que $e \in \mathbb{E}$.

O elo $\langle x, y \rangle$ será dito $p_k^{\alpha, \beta}$ -aberto se $\eta_{\alpha, \beta}(\langle x, y \rangle) = 1$ e dito $p_k^{\alpha, \beta}$ -fechado se $\eta_{\alpha, \beta}(\langle x, y \rangle) = 0$. Se $\alpha \leq \alpha'$, temos que $p_k^{\alpha, \beta} \leq p_k^{\alpha', \beta}$ e, com isso, $U(\langle x, y \rangle) < p_k^{\alpha, \beta} \Rightarrow U(\langle x, y \rangle) < p_k^{\alpha', \beta}$. Portanto, para todo $e \in \mathbb{E}$, $\eta_{\alpha, \beta}(e) \leq \eta_{\alpha', \beta}(e)$.

O conjunto de elos abertos no processo com parâmetro $p_k^{\alpha, \beta}$ está contido no conjunto de elos abertos no processo com parâmetro $p_k^{\alpha', \beta}$. Isso implica que $\theta(\alpha, \beta) \leq \theta(\alpha', \beta)$.

Utilizando a técnica de acoplamento semelhante àquela feita anteriormente prova-se que $\theta(\alpha, \beta)$ é não crescente com respeito a β dado α . Então faz sentido estudar o valor

crítico de α , em função de β , isto é:

$$\alpha_c(\beta) := \inf\{\alpha \geq 0 \mid \theta(\alpha, \beta) > 0\}.$$

Será visto neste trabalho que $\alpha_c(\beta)$ é uma função contínua quando $0 < \beta < N^2$ e é estritamente crescente quando $N \leq \beta < N^2$.

Para a demonstração de alguns dos resultados desse modelo utilizaremos a notação $\lceil x \rceil$ para a função teto e $\lfloor x \rfloor$ para o piso de x , ou seja, $\lceil x \rceil := \inf\{n \in \mathbb{Z}; n \geq x\}$ e $\lfloor x \rfloor := \sup\{n \in \mathbb{Z}; n \leq x\}$.

Capítulo 2

Transição de fase

O primeiro resultado diz respeito à existência de um diagrama de fases não trivial do modelo. Para valores pequenos de β , com pequeno queremos dizer $\beta \leq N$, o valor de α_c é zero, ou seja, há percolação com probabilidade positiva para todo α . Já para valores grandes de β , isto é, $\beta \geq N^2$, $\alpha_c(\beta) = \infty$. Portanto não há percolação. O intervalo mais interessante é quando $N < \beta < N^2$, que se sabe apenas que $\alpha_c(\beta) > 0$. Um problema em aberto é estudar o comportamento de $\alpha_c(\beta)$ em função de β quando $N < \beta < N^2$.

Teorema 2.1 *Transição de fase do modelo.*

(a) $\alpha_c(\beta) = 0$ para $\beta \leq N$,

(b) $0 < \alpha_c(\beta) < \infty$ para $N < \beta < N^2$,

(c) $\alpha_c(\beta) = \infty$ para $\beta \geq N^2$.

2.1 Demonstração da parte (a)

Para provar a parte (a), considere E_k o evento em que a origem está conectada a pelo menos um vértice à distância k . Relembrando que $(N-1)N^{k-1}$ é o número de vértices que estão a distância k da origem, temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_k) &= 1 - \mathbb{P}(E_k^c) = 1 - (1 - p_k)^{(N-1)N^{k-1}} = 1 - \exp\left\{-\frac{\alpha}{\beta^k}\right\}^{(N-1)N^{k-1}} \\ &= 1 - \exp\left\{-\frac{\alpha(N-1)}{N}\left(\frac{N}{\beta}\right)^k\right\}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Observe que se $\beta \leq N$, no lado direito da expressão (2.1), o termo $\left(\frac{N}{\beta}\right)^k \geq 1$. Logo, para todo $k \geq 1$,

$$\mathbb{P}(E_k) \geq 1 - \exp\left\{-\frac{\alpha(N-1)}{N}\right\}.$$

Assim, tem-se que para todo $\alpha > 0$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[1 - \exp\left\{-\frac{\alpha(N-1)}{N}\left(\frac{N}{\beta}\right)^k\right\}\right] \geq \sum_{k=1}^{\infty} \left[1 - \exp\left\{-\frac{\alpha(N-1)}{N}\right\}\right] = \infty.$$

Como $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_k) = \infty$ e os eventos $(E_k)_{k \geq 1}$ são independentes, pois o estado (aberto ou fechado) de cada elo é definido de forma independente, pelo Lema de Borel-Cantelli, tem-se que $\mathbb{P}(E_k \text{ i.v.}) = 1$. Então quando $\alpha > 0$ e $\beta \leq N$, a origem se conecta a infinitos vértices com probabilidade 1, ou seja, $\theta(\alpha, \beta) = 1$. Com isso, conclui-se que $\alpha_c = \inf\{\alpha \geq 0 : \theta(\alpha, \beta) \geq 0\} = 0$ quando $\beta \leq N$.

□

2.2 Demonstração da parte (c)

A parte (c) do primeiro teorema, afirma que se β é grande, isto é, $\beta \geq N^2$, a probabilidade de percolação é zero. Assim sendo, $\alpha_c(\beta) = \infty$. Para demonstrar esse resultado, será suficiente provar que $\alpha_c(\beta) = \infty$ se $\beta = N^2$. Isso porque a função $\theta(\alpha, \beta)$ é não

crescente em relação a β , para α fixo, como já foi citado na Seção 1.2.

Considere agora $n_0 = 0$ e $n_{i+1} = \inf\{n \geq n_i : \mathcal{B}_{n_i}(0) \leftrightarrow \overline{\mathcal{B}_n(0)}\}$ para $i \geq 0$. O exemplo a seguir ilustra o que os valores n_i representam:

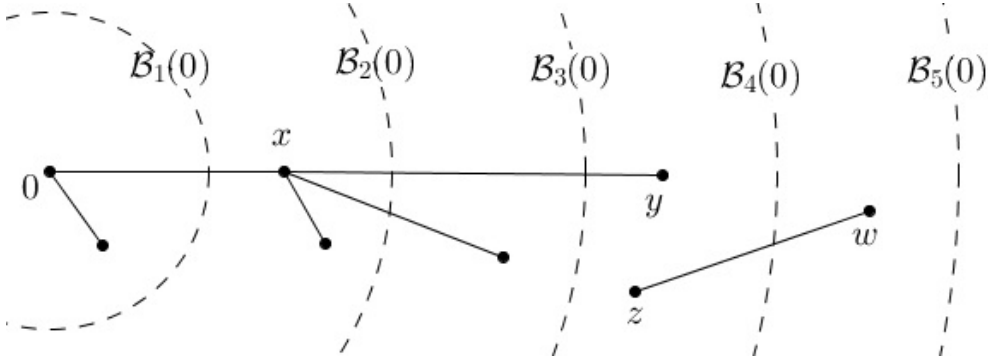


Figura 2.1: Exemplo de configuração para analisar os valores n_i .

Exemplo 1 Considere a configuração mostrada na Figura 2.1. O valor de n_1 será 2, pois o vértice mais distante conectado a origem é x e ele está na bola $\mathcal{B}_2(0)$. Já $n_2 = 4$ porque $y \in \mathcal{B}_4(0)$ é o vértice mais distante e que se conecta com algum vértice pertencente a bola $\mathcal{B}_2(0)$. Usando o mesmo raciocínio, conclui-se que $n_i = 5$ para todo $i \geq 3$.

A partir da definição de n_i , se existir pelo menos um i tal que $n_i = n_{i+1}$ então $\{(\mathcal{B}_{n_i}(0) \setminus \mathcal{B}_{n_{i-1}}(0)) \leftrightarrow \overline{\mathcal{B}_{n_i}(0)}\}$ e portanto o aglomerado da origem é finito, em outras palavras, $\{|\mathcal{C}(0)| = \infty\} \subset \{\mathcal{B}_0(0) \leftrightarrow \overline{\mathcal{B}_0(0)}\} \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} \{(\mathcal{B}_{n_i}(0) \setminus \mathcal{B}_{n_{i-1}}(0)) \leftrightarrow \overline{\mathcal{B}_{n_i}(0)}\}$.

A seguir será provado que existe i tal que $n_{i+1} = n_i$ quase certamente quando $\beta = N^2$. Para tal demonstração, considere $n_i = j$ e lembre que existem N^j vértices

na bola $\mathcal{B}_j(0)$ e $(N-1)N^{k-1}$ vértices a distância k de um vértice qualquer. Temos,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}((\mathcal{B}_{n_i}(0) \setminus \mathcal{B}_{n_{i-1}}(0)) \leftrightarrow \overline{\mathcal{B}_{n_i}(0)}) &\leq \mathbb{P}(\mathcal{B}_j(0) \leftrightarrow \overline{\mathcal{B}_j(0)}) \\
 &= 1 - \mathbb{P}(\mathcal{B}_j(0) \leftrightarrow \overline{\mathcal{B}_j(0)}) \\
 &= 1 - \prod_{k=j+1}^{\infty} (1 - p_k)^{(N-1)N^{k-1}N^j} \\
 &= 1 - \prod_{k=j+1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\alpha}{\beta^k}\right\}^{(N-1)N^{k-1}N^j} \quad (\text{como } \beta = N^2) \\
 &= 1 - \exp\left\{-\sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{\alpha(N-1)N^{k-1}N^j}{N^{2k}}\right\} \\
 &= 1 - \exp\left\{-\frac{\alpha(N-1)N^j}{N} \sum_{k=j+1}^{\infty} \left(\frac{N}{N^2}\right)^k\right\} \\
 &= 1 - \exp\left\{-\frac{\alpha(N-1)N^j}{N} \frac{1}{N^{j+1}} \frac{N}{N-1}\right\} \\
 &= 1 - \exp\left\{-\frac{\alpha}{N}\right\}.
 \end{aligned}$$

Portanto $\mathbb{P}((\mathcal{B}_{n_i}(0) \setminus \mathcal{B}_{n_{i-1}}(0)) \leftrightarrow \overline{\mathcal{B}_{n_i}(0)}) \leq 1 - \exp\{-\frac{\alpha}{N}\}$, que é estritamente menor do que 1 e independe de n_i . Então $\mathbb{P}((\mathcal{B}_{n_i}(0) \setminus \mathcal{B}_{n_{i-1}}(0)) \leftrightarrow \overline{\mathcal{B}_{n_i}(0)}) > \exp\{-\frac{\alpha}{N}\}$ que é constante e estritamente positiva, logo

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}((\mathcal{B}_{n_i}(0) \setminus \mathcal{B}_{n_{i-1}}(0)) \leftrightarrow \overline{\mathcal{B}_{n_i}(0)}) = \infty.$$

Como os eventos $\{(\mathcal{B}_{n_i}(0) \setminus \mathcal{B}_{n_{i-1}}(0)) \leftrightarrow \overline{\mathcal{B}_{n_i}(0)}\}_{i \geq 1}$ são independentes, pelo Lema de Borel-Cantelli, $\mathbb{P}(\{(\mathcal{B}_{n_i}(0) \setminus \mathcal{B}_{n_{i-1}}(0)) \leftrightarrow \overline{\mathcal{B}_{n_i}(0)}\} \text{ i.v.}) = 1$. Então, quando $\beta = N^2$, quase certamente existirá i tal que $n_{i+1} = n_i$, isto é, $\mathbb{P}(|\mathcal{C}(0)| < \infty) = 1$ o que implica que $\alpha_c(\beta) = \infty$.

□

2.3 Demonstração da parte (b)

A parte b do Teorema 1.1 diz que se $\beta \in (N, N^2)$, então $0 < \alpha_c(\beta) < \infty$. Na primeira parte mostraremos que $\alpha_c(\beta) > 0$ utilizando o processo de ramificação, explicado no Apêndice B. Já a segunda parte é mais difícil e mostrará que $\alpha_c(\beta) < \infty$ se $\beta \in (N, N^2)$.

Parte 1

O modelo de percolação de longo alcance pode ser associado ao processo de ramificação introduzido no Apêndice B. Considerando a origem de Ω_N como único indivíduo da população inicial no processo de ramificação, isto é, considerando $X_0 = 1$, podemos interpretar o conjunto $A_1 := \{x \in \Omega_N : x \leftrightarrow A_0\}$, onde $A_0 = \{0\}$, como a primeira geração de descendentes da origem. Assim $X_1 = |A_1|$. A probabilidade da origem se conectar a j vértices será denotada por P_j , com $j = 0, 1, \dots$, e $\sum_{j=0}^{\infty} P_j = 1$. Apesar de não ser fácil explicitar uma fórmula para essa probabilidade, P_j será o produto de p_k 's e $(1 - p_k)$'s, definidos na Seção 1.2 como a probabilidade do elo estar aberto ou fechado, respectivamente. Por isso, para qualquer vértice $x \in \Omega_N$, a probabilidade de x gerar j descendentes também será P_j , para todo $j = 0, 1, 2, \dots$

A segunda geração é formada pelos vértices em (Ω_N, d) que se conectam a $A_1 \setminus A_0$, ou seja, é o conjunto $A_2 = \{x \in \Omega_N : x \leftrightarrow A_1 \setminus A_0\}$. Novamente, a probabilidade de um vértice de A_1 ter gerado j descendentes é P_j , com $j = 0, 1, \dots$. Note que $|A_2| = X_2$.

De forma geral, a $n + 1$ -ésima geração, representada por A_{n+1} , será formada pelos descendentes de A_n , ou seja, $A_{n+1} := \{x \in \Omega_N : x \leftrightarrow A_n \setminus \cup_{j=0}^{n-1} A_j\}$ e $X_{n+1} = |A_{n+1}|$. Da mesma forma que no Apêndice B, a sequência de variáveis aleatórias $(X_n)_{n \geq 1}$ forma uma cadeia de Markov.

No processo de ramificação, se a média de filhos do primeiro indivíduo da população for menor do que 1, então a população se extingue quase certamente, ou seja, o número total de descendentes será finito. Associando esse processo ao modelo de percolação de

longo-alcance, se o número esperado de vértices conectados a origem for menor do que 1, então o aglomerado da origem será finito quase certamente. É esse valor esperado que será calculado a seguir. Definindo a variável aleatória Y como o número de vértices conectados ao vértice x por um único elo e utilizando o fato de que $e^{-x} \geq 1 - x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (ver Apêndice C), tem-se que:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_{\alpha,\beta}(Y) &= \sum_{k=1}^{\infty} (N-1)N^{k-1}p_k = \sum_{k=1}^{\infty} (N-1)N^{k-1} \left[1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{\beta^k}\right) \right] \\
 &\leq \sum_{k=1}^{\infty} (N-1)N^{k-1} \frac{\alpha}{\beta^k} \\
 &= \frac{\alpha(N-1)}{N} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{N}{\beta}\right)^k \\
 &= \frac{\alpha(N-1)}{N} \frac{N}{\beta} \frac{\beta}{\beta - N} \\
 &= \alpha \frac{(N-1)}{\beta - N}. \tag{2.2}
 \end{aligned}$$

Escolhendo $\alpha > 0$ pequeno o suficiente, o lado direito da expressão (2.2) fica estritamente menor do que 1. Portanto, o número esperado de vértices conectados a origem por um único elo aberto é estritamente menor do que 1, o que implica que o aglomerado da origem é finito quase certamente. Logo, $\alpha_c(\beta) > 0$ para $\beta \in (N, N^2)$.

□

Parte 2

Na demonstração da segunda desigualdade deste teorema, isto é, $\alpha_c(\beta) < \infty$ para $\beta \in (N, N^2)$, será provado que para α grande suficiente,

$$t_n := \mathbb{P}(|\mathcal{C}_{nK}(0)| \geq \eta^{nK}) > 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^{k+1} > 0,$$

onde $K, \eta > 1$ são constantes reais adequadas e $\gamma \in (0, 1/2)$. Portanto, $\theta(\alpha, \beta) = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n > 0$ implicando $a_c(\beta) < \infty$. Será utilizada renormalização para deduzir a cota inferior para a probabilidade definida como t_n .

Considere K um inteiro fixo e $\eta \in \mathbb{R}$ grande suficiente tal que a desigualdade abaixo seja satisfeita:

$$\sqrt{\beta} < \eta \leq (N^K - 1)^{\frac{1}{K}}. \quad (2.3)$$

A escolha de η é possível pois $N < \beta < N^2$, logo $\sqrt{\beta} < N$ e $(N^K - 1)^{\frac{1}{K}} \xrightarrow{K \rightarrow \infty} N$.

As duas quantidades a seguir serão importantes no cálculo de probabilidades no grafo renormalizado:

$$s_n := \mathbb{P}_{\alpha, \beta}(|\mathcal{C}_{nK}^m(0)| \geq \eta^{nK}) \quad (2.4)$$

e

$$\varepsilon_n := \exp \left\{ -\frac{\alpha}{\beta^K} \left(\frac{\eta^2}{\beta} \right)^{nK} \right\}. \quad (2.5)$$

Por convenção, $s_0 = 1$.

Para os próximos argumentos será utilizada a técnica de renormalização. Primeiro será definido o que é uma bola *boa* e depois o que é uma bola *muito boa*. Tais definições envolvem a ocorrência de certos eventos em bolas no grafo original.

A bola de raio nK , $\mathcal{B}_{nK}(x)$, é dita *boa* se seu maior aglomerado tiver tamanho maior ou igual a η^{nK} , ou seja, se $|\mathcal{C}_{nK}^m(x)| \geq \eta^{nK}$. Logo se vê que s_n definido em (2.4) é a probabilidade da bola $\mathcal{B}_{nK}(0)$ ser *boa*.

Agora considere a bola $\mathcal{B}_{(n+1)K}(y) \supset \mathcal{B}_{nK}(x)$. Nela há N^K bolas de raio nK e em cada bola \mathcal{B}_{nK} há um maior aglomerado \mathcal{C}_{nK}^m . Então considere a coleção desses maiores aglomerados dentro da bola $\mathcal{B}_{(n+1)K}(y)$, ou seja, considere o conjunto

$\{\mathcal{C}_{nK}^m(x)\}_{x \in \mathcal{B}_{(n+1)K}(y)}$ e os denote por $\mathcal{C}(n,y,1), \mathcal{C}(n,y,2), \dots, \mathcal{C}(n,y,N^K)$. A bola $\mathcal{B}_{nK}(x) \subset \mathcal{B}_{(n+1)K}(y)$ será *muito boa* se ela for *boa* e se uma das duas condições a seguir for satisfeita:

- ela é a primeira bola *boa*, ou seja, $\mathcal{C}_{nK}^m(x) = \mathcal{C}(n,y,J)$, onde $J = \min\{i : |\mathcal{C}(n,y,i)| \geq \eta^{nK}\}$,
- existe pelo menos um elo que conecta um vértice de $\mathcal{C}_{nK}^m(x)$ a outro de $\mathcal{C}(n,y,J)$, isto é, se $\mathcal{C}_{nK}^m(x) \leftrightarrow \mathcal{C}(n,y,J)$.

Percebe-se que a primeira bola *boa* de raio nK contida na bola $\mathcal{B}_{(n+1)K}(y)$ será também *muito boa*. A próxima pergunta é: em quais condições a bola $\mathcal{B}_{(n+1)K}(y)$ será *boa*? Suponha que sejam satisfeitos os itens abaixo:

- (a) $\mathcal{B}_{(n+1)K}(y)$ contém $N^K - 1$ bolas *boas* de raio nK .
- (b) Todas as bolas *boas* de raio nK contidas em $\mathcal{B}_{(n+1)K}(y)$ são *muito boas*.

Então, como $\eta^K \leq N^K - 1$ por (2.3), os itens acima implicam que a bola $\mathcal{B}_{(n+1)K}(y)$ é *boa* pois

$$|\mathcal{C}_{(n+1)K}^m(y)| \geq (N^K - 1)\eta^{nK} \geq \eta^K \eta^{nK} = \eta^{(n+1)K}.$$

Sobre o evento (a), considere a variável aleatória X que conta o número de bolas *boas* de raio nK contidas em $\mathcal{B}_{(n+1)K}(y)$. X tem distribuição binomial com parâmetros N^K , que é o total de bolas \mathcal{B}_{nK} em $\mathcal{B}_{(n+1)K}(y)$, e s_n (definido em (2.4)), isto é, $X \sim \text{Bin}(N^K, s_n)$. Com respeito ao evento (b), dada a coleção de bolas *boas* de raio nK , a primeira bola *boa*, $\mathcal{C}(n,y,J)$, é *muito boa* com probabilidade 1. Para as outras bolas *boas*, tem-se que a distância máxima entre seus vértices e $\mathcal{C}(n,y,J)$ é $(n+1)K$ pois ambas bolas estão contidas em $\mathcal{B}_{(n+1)K}(y)$. Considerando que η^{nK} é o número mínimo de vértices que pertencem aos maiores clusters das bolas *boas*, $\mathcal{C}(n,y,i)$, temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{\alpha,\beta}(\mathcal{C}(n,y,J) \leftrightarrow \mathcal{C}(n,y,i)) &\geq 1 - \left(\exp \left\{ -\frac{\alpha}{\beta^{(n+1)K}} \right\} \right)^{\eta^{nK}\eta^{nK}} \\
&= 1 - \exp \left\{ -\frac{\alpha}{\beta^K} \left(\frac{\eta^2}{\beta} \right)^{nK} \right\} \text{ (pela equação (2.5))} \\
&= 1 - \varepsilon_n.
\end{aligned}$$

Logo a probabilidade de uma bola *boa* se conectar a primeira bola *boa* é maior ou igual a $1 - \varepsilon_n$. Então, voltando a bola $\mathcal{B}_{(n+1)K}(y)$, o número de bolas *muito boas* contidas nela tem distribuição de probabilidade estocasticamente maior que uma $Bin(N^K, s_n(1 - \varepsilon_n))$. Para demonstrar isso considere as variáveis aleatórias $X_i \sim Bernoulli(s_n(1 - \varepsilon_n))$, para $i = 1, 2, \dots, N^K$. Vamos definir também a variável Y_i que atribui valor 1 a i -ésima bola de raio nK , contida em $\mathcal{B}_{(n+1)K}(0)$, se ela for *muito boa* e 0, caso contrário. Chamando de $A = \{\mathcal{B}_{nK}(0) \text{ é boa}\}$, observe que:

$$\begin{aligned}
P(Y_1 = 1) &= s_n \geq (1 - \varepsilon_n)s_n \\
P(Y_j = 1) &= P(Y_j = 1 | A)P(A) + P(Y_j = 1 | A^c)P(A^c) \\
&\geq (1 - \varepsilon_n)s_n + P(Y_j = 1 | A^c)P(A^c) \geq (1 - \varepsilon_n)s_n,
\end{aligned}$$

para todo $j = 2, \dots, N^K$. Como já foi mostrado no Apêndice C,

$$P\left(\sum_{j=1}^{N^K} Y_j \geq k\right) \geq P\left(\sum_{j=1}^{N^K} X_j \geq k\right) = P(Bin(N^K, (1 - \varepsilon_n)s_n) \geq k),$$

para todo k . Portanto

$$\mathbb{P}(|\mathcal{C}_{(n+1)K}^m(0)| \geq \eta^{(n+1)K}) = s_{n+1} \geq \mathbb{P}(Bin(N^K, s_n(1 - \varepsilon_n)) \geq N^{K-1}).$$

Agora utilizaremos a seguinte desigualdade provada também no Apêndice C:

$$\mathbb{P}(\text{Bin}(k,p) \geq k-1) \geq 1 - \binom{k}{2}(1-p)^2.$$

Denotando por $C = \binom{N^K}{2}$, chegamos na próxima desigualdade:

$$\begin{aligned} s_{n+1} &\geq \mathbb{P}(\text{Bin}(N^K, s_n(1-\varepsilon_n)) \geq N^{K-1}) \\ &\geq 1 - C[1 - s_n(1-\varepsilon_n)]^2 \\ &= 1 - C(1 - s_n + s_n\varepsilon_n)^2 \quad (s_n \leq 1) \\ &\geq 1 - C(1 - s_n + \varepsilon_n)^2. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Chamando $\xi_n = 1 - s_n$, temos

$$\begin{aligned} 1 - \xi_{n+1} &\geq 1 - C(\xi_n + \varepsilon_n)^2 \\ \Rightarrow \xi_{n+1} &\leq C(\xi_n + \varepsilon_n)^2. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Seja $\gamma \in (0,1/2)$ pequeno suficiente tal que $4C\gamma \leq 1$. Também pode-se escolher α grande suficiente tal que $\varepsilon_n \leq \gamma^n$ e $\xi_1 = \mathbb{P}(|\mathcal{C}_K^m(0)| < \eta^K) \leq \gamma^2$. A primeira desigualdade segue como consequência da propriedade de que $\frac{1}{x} > e^{-x}$ para todo $x > 0$, provada no Apêndice C, ou seja,

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &:= \exp\left\{-\frac{\alpha}{\beta^K}\left(\frac{\eta^2}{\beta}\right)^{nK}\right\} = \left(\exp\left\{-\left(\frac{\eta^2}{\beta}\right)^{nK}\right\}\right)^{\frac{\alpha}{\beta^K}} \\ &< \left[\left(\frac{\beta}{\eta^2}\right)^{nK}\right]^{\frac{\alpha}{\beta^K}} = \left[\left(\frac{\beta}{\eta^2}\right)^{\frac{\alpha K}{\beta^K}}\right]^n. \end{aligned}$$

Já a segunda desigualdade é garantida porque, pela desigualdade (2.7) e por $s_0 = 1$,

$$\xi_1 \leq C(\xi_0 + \varepsilon_0)^2 = C(1 - s_0 + \varepsilon_0)^2 = C\varepsilon_0^2 = C \exp \left\{ -\frac{2\alpha}{\beta K} \right\}.$$

Como C é um inteiro positivo, pode-se obter $\xi_1 \leq \gamma^2$ escolhendo α grande o suficiente.

Mostraremos agora, por indução, que $\xi_n \leq \gamma^{n+1}$ para todo n natural. Para isso, basta assumir que é verdade a desigualdade $\xi_n \leq \gamma^{n+1}$ para n e provar que também vale para o caso $n+1$, isto é, $\xi_{n+1} \leq \gamma^{n+2}$ (o caso $n=1$ já foi mostrado acima). Temos a seguinte cadeia de desigualdades:

$$\begin{aligned} \xi_{n+1} &\leq C(\xi_n + \varepsilon_n)^2 \leq C(\gamma^{n+1} + \gamma^n)^2 && \left(\gamma \in \left(0, \frac{1}{2} \right) \right) \\ &\leq C(\gamma^{n+1} + \gamma^{n+1})^2 = 4C\gamma^{2n+2} && (4C \leq \gamma^{-1}) \\ &\leq \gamma^{2n+1} && (2n+1 \geq n+2 \ \forall n \geq 1) \\ &\leq \gamma^{n+2}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Como $\xi_n \leq \gamma^{n+1}$ para todo n , então ξ_n decresce exponencialmente para zero, ou seja, s_n converge para 1. Porém, s_n é a probabilidade do evento em que o maior aglomerado de $\mathcal{B}_{nk}(0)$ tem tamanho maior ou igual a η^{nK} . Mas a origem não pertence necessariamente a $\mathcal{C}_{nK}^m(0)$, portanto não é possível concluir ainda que há percolação na origem com probabilidade positiva. Para isso considere a definição a seguir:

$$t_n := \mathbb{P}(|\mathcal{C}_{nK}(0)| \geq \eta^{nK}).$$

Considerando que $|\mathcal{C}_{nK}(0)| \geq \eta^{nK}$, qual seria a condição para que o aglomerado aberto $\mathcal{C}_{(n+1)K}(0)$, restrito à bola $\mathcal{B}_{(n+1)K}(0)$, tenha tamanho maior ou igual a $\eta^{(n+1)K}$? Suponha $|\mathcal{C}_{nK}(0)| \geq \eta^{nK}$. Como $\mathcal{B}_{nK}(0)$ é a primeira bola *boa* em $\mathcal{B}_{(n+1)K}(0)$, é suficiente que pelo menos $N^K - 2$ componentes abertas em $\mathcal{B}_{(n+1)K}(0)$ estejam conectadas

a $\mathcal{C}_{nK}(0)$, uma vez que $\eta \leq (N^K - 1)^{\frac{1}{K}}$ por (2.3). Neste caso,

$$|\mathcal{C}_{(n+1)K}(0)| \geq \eta^{nK} + \eta^{nK}(N^K - 2) = \eta^{nK}(N^K - 1) \geq \eta^{(n+1)K}.$$

Como já calculamos anteriormente, a probabilidade de que isso ocorra é maior ou igual que $\mathbb{P}(\text{Bin}(N^{K-1}, s_n(1 - \varepsilon_n)) \geq N^{K-2})$, logo:

$$t_{n+1} \geq t_n \times \mathbb{P}(\text{Bin}(N^{K-1}, s_n(1 - \varepsilon_n)) \geq N^{K-2}).$$

Chamando $N^K = n$, $s_n(1 - \varepsilon_n) = p$ e usando a propriedade $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$, chega-se a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{Bin}(N^{K-1}, s_n(1 - \varepsilon_n)) \geq N^{K-2}) &= \mathbb{P}(\text{Bin}(n-1, p) \geq n-2) \\ &= \binom{n-1}{n-2} p^{n-2} (1-p) + p^{n-1} \\ &\geq \binom{n-1}{n-2} p^{n-1} (1-p) + p^{n-1} - p^n + p^n \\ &= \binom{n-1}{n-2} p^{n-1} (1-p) + p^{n-1} (1-p) + p^n \\ &= \binom{n-1}{n-2} p^{n-1} (1-p) + \binom{n-1}{n-1} p^{n-1} (1-p) + p^n \\ &= \left[\binom{n-1}{n-2} + \binom{n-1}{n-1} \right] p^{n-1} (1-p) + p^n \\ &= \binom{n}{n-1} p^{n-1} (1-p) + p^n \\ &= \mathbb{P}(\text{Bin}(n, p) \geq n-1) \\ &= \mathbb{P}(\text{Bin}(N^K, s_n(1 - \varepsilon_n)) \geq N^{K-1}). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Por (2.6), a probabilidade em (2.9) é maior ou igual a $1 - C(\xi_n + \varepsilon_n)^2$ e, por (2.8), $1 - C(\xi_n + \varepsilon_n)^2 \geq 1 - \gamma^{n+2}$. Então, $\mathbb{P}(\text{Bin}(N^{K-1}, s_n(1 - \varepsilon_n)) \geq N^{K-2}) \geq 1 - \gamma^{n+2}$.

Voltando à desigualdade (3.8), utilizando o resultado acima, conclui-se que:

$$\begin{aligned} t_{n+1} &\geq t_n(1 - \gamma^{n+2}) \geq t_{n-1}(1 - \gamma^{n+1})(1 - \gamma^{n+2}) \geq \dots \geq \\ &\geq t_0(1 - \gamma^2)(1 - \gamma^3) \dots (1 - \gamma^{n+2}) = \prod_{i=1}^{n+1} (1 - \gamma^{i+1}). \end{aligned} \quad (2.10)$$

É possível demonstrar por indução que $\prod_{i=1}^n (1 - \gamma^{i+1}) > 1 - \sum_{i=1}^n \gamma^{i+1}$, quando $n > 1$. Para o caso $n = 2$, tem-se que:

$$(1 - \gamma^2)(1 - \gamma^3) = 1 - (\gamma^2 + \gamma^3) + \gamma^2\gamma^3 > 1 - (\gamma^2 + \gamma^3).$$

Assumindo que a desigualdade é válida para $n = j$, falta provar que o resultado também vale para o caso $n = j + 1$:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{j+1} (1 - \gamma^{i+1}) &= \left[\prod_{i=1}^j (1 - \gamma^{i+1}) \right] (1 - \gamma^{j+2}) \\ &> \left(1 - \sum_{i=1}^j \gamma^{i+1} \right) (1 - \gamma^{j+2}) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{j+1} \gamma^{i+1} + \left(\sum_{i=1}^j \gamma^{i+1} \right) \gamma^{j+2} \\ &> 1 - \sum_{i=1}^{j+1} \gamma^{i+1}. \end{aligned}$$

Portanto, $\prod_{i=1}^n (1 - \gamma^{i+1}) > 1 - \sum_{i=1}^n \gamma^{i+1}$ para todo $n > 1$. Como $\{|\mathcal{C}(0)| = \infty\} \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} \{|\mathcal{C}_{nK}(0)| \geq \eta^{nK}\}$, temos

$$\begin{aligned}
 \theta(\alpha, \beta) &= \mathbb{P}_{\alpha, \beta}(|\mathcal{C}(0)| = \infty) \\
 &\geq \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{|\mathcal{C}_{nK}(0)| \geq \eta^{nK}\}\right) \\
 &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{|\mathcal{C}_{nK}(0)| < \eta^{nK}\}\right) \\
 &\geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|\mathcal{C}_{nK}(0)| < \eta^{nK}) \\
 &\geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} (1 - t_n) \\
 &\geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \prod_{i=1}^n (1 - \gamma^{i+1})\right) \\
 &> 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \left(1 - \sum_{i=1}^n \gamma^{i+1}\right)\right] \\
 &> 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^{n+1} \\
 &> 0 \quad (\gamma \in (0, 1/2)).
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Portanto $\alpha_c(\beta) < \infty$ para $\beta \in (N, N^2)$, pois para α grande suficiente tem-se $\theta(\alpha, \beta) > 0$. Fica demonstrado a segunda parte do Teorema 2.1(b).

□

Sobre a demonstração desse teorema já é possível fazer duas observações:

Observação 1:

Na demonstração do Teorema 2.1(a) foi visto que $\alpha_c(\beta) = 0$ quando $\beta \leq N$, ou seja, $\alpha_c(N) = 0$. Já na primeira parte do Teorema 2.1(b) foi demonstrado que quando $\beta \in (N, N^2)$, $\alpha_c(\beta)$ é estritamente positivo e, pela desigualdade (2.2), temos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} (N-1)N^{k-1}p_k \leq \alpha \frac{N-1}{\beta-N}.$$

Vimos que se $\alpha \frac{N-1}{\beta-N} < 1$, isto é, $\alpha < \frac{\beta-N}{N-1}$, então $\theta(\alpha, \beta) = 0$. Isso implica que $\alpha_c \geq \frac{\beta-N}{N-1}$ para todo $\beta \in (N, N^2)$. A partir disso é possível concluir que a derivada de $\alpha_c(\beta)$ quando $\beta > N$ será:

$$\frac{\alpha_c(\beta) - \alpha_c(N)}{\beta - N} \geq \frac{\frac{\beta-N}{N-1} - 0}{\beta - N} = \frac{1}{N-1} > 0.$$

Logo, a derivada a direita no ponto N é estritamente positiva e a derivada a esquerda é zero, ou seja, $\alpha_c(\beta)$ é não diferenciável em $\beta = N$.

Observação 2:

A segunda parte da demonstração do Teorema 2.1(b) nos garante uma propriedade importante que será utilizada mais adiante. É garantido que para todo $\varepsilon > 0$, existirá α grande suficiente tal que $\theta(\alpha, \beta) > 1 - \varepsilon$ sempre que $\beta \in (N, N^2)$. Isso porque, de acordo com a cadeia de desigualdades em (2.10), temos que $t_n \geq \prod_{i=1}^n (1 - \gamma^{i+1})$, ou seja, para todo $\varepsilon > 0$ é possível escolher α grande o suficiente tal que γ fica arbitrariamente pequeno e, como consequência, $t_n > 1 - \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\theta(\alpha, \beta) = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$, temos $\theta(\alpha, \beta) > 1 - \varepsilon$.

A seguir será apresentado o resultado que garante a unicidade do aglomerado aberto infinito. Além da unicidade, a demonstração desse teorema também garante que é possível fazer o mergulho aleatório da árvore que representa a métrica em \mathbb{Z} de maneira estacionária e ergódica. O fato do mergulho ser ergódico também será utilizado posteriormente para demonstrar o Teorema 4.1.

Capítulo 3

Unicidade do aglomerado aberto infinito

Teorema 3.1 *Para qualquer valor de α e β , existe no máximo um aglomerado infinito quase certamente.*

Para demonstração desse teorema será utilizado o Teorema 0 de [10] que garante a unicidade do aglomerado infinito em \mathbb{Z}^d . Aqui o Teorema 0 será chamado de Teorema 3.2.

Teorema 3.2 *Considere o modelo de percolação de longo-alcance em \mathbb{Z}^d com as seguintes propriedades:*

- 1. O modelo é invariante por translação.*
- 2. O modelo satisfaz a condição de energia finita positiva (definida abaixo).*

Então, quase certamente, poderá existir no máximo um aglomerado infinito.

Para utilizar o Teorema 3.2 na demonstração do Teorema 3.1, será preciso mergulhar a árvore que representa a métrica em \mathbb{Z} de forma estacionária e garantir a condição de

energia finita positiva. Essa condição é de que para todo par de vértices $\{z_1, z_2\}$, em que $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}^d$, a probabilidade de que $z_1 \leftrightarrow z_2$, dado o estado de todos os outros elos, é positiva quase certamente. Observe que no modelo tradicional em \mathbb{Z}^d , apresentado no Capítulo 1, essa condição é satisfeita uma vez que o estado de cada elo é escolhido de maneira independente.

Agora será apresentada a ideia de como será feito o mergulho da árvore em \mathbb{Z} . Para isso, para cada valor de r , o mergulho respeitará as duas seguintes condições:

- (a) Toda bola de raio r será representada por N^r inteiros consecutivos, já que há N^r vértices em \mathcal{B}_r .
- (b) A coleção de bolas de raio r particionam \mathbb{Z} .

O mergulho aleatório da árvore que representa a métrica em \mathbb{Z} será feita da seguinte forma. A origem será representada pelo próprio $0 \in \mathbb{Z}$. A bola $\mathcal{B}_1(0)$ será escolhida uniformemente de maneira que N inteiros consecutivos pertençam a ela, incluindo o 0. As outras bolas de raio 1 serão determinadas conforme os itens (a) e (b). A escolha de $\mathcal{B}_1(0)$ pode ser feita de N maneiras diferentes. A Figura 3.1 mostra o caso em que $N = 2$ e as duas possibilidades de escolher $\mathcal{B}_1(0)$:

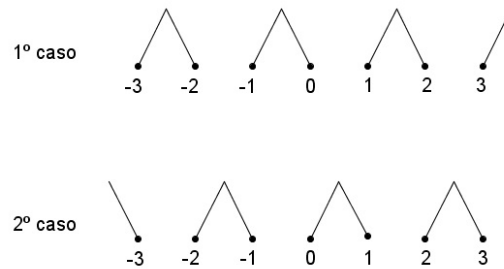


Figura 3.1: Bolas de raio 1 em \mathbb{Z}

Apesar de se saber qual bola em \mathbb{Z} corresponde a $\mathcal{B}_1(0)$, não se sabe ainda a relação entre as outras bolas de raio 1 em \mathbb{Z} e na árvore original. Depois de escolhida a bola $\mathcal{B}_1(0)$, o próximo passo é determinar a bola $\mathcal{B}_2(0)$. Semelhante ao caso anterior, a bola

$\mathcal{B}_2(0)$ será escolhida de forma a conter N^2 inteiros consecutivos, ou seja, a conter N bolas de raio 1, incluindo a bola $\mathcal{B}_1(0)$. Há N possibilidades de fazer isso, cada uma com probabilidade $1/N$ de ser escolhida. Novamente, as outras bolas de raio 2 são determinadas seguindo as condições (a) e (b). A Figura 3.2 ilustra uma das possíveis escolhas de $\mathcal{B}_2(0)$, para $N = 2$, considerando o primeiro caso da Figura 3.1:

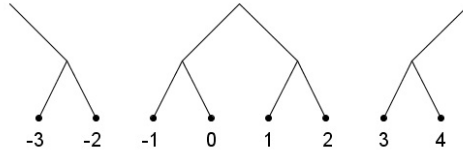


Figura 3.2: Bola $\mathcal{B}_2(0)$ em \mathbb{Z}

Continuando essa construção, a árvore do modelo original (ver Figura 1.2) é mergulhada em \mathbb{Z} . Como o mergulho é feito de forma que primeiro identificamos a origem com $0 \in \mathbb{Z}$ e em seguida construímos as bolas $\mathcal{B}_r(0)$, $r = 1, 2, \dots$, a árvore original é isomorfa à árvore em \mathbb{Z} . Note que a imagem de $\mathcal{B}_n(0)$ está contida no conjunto $\{1 - N^n, \dots, 0, \dots, N^n - 1\}$.

Feito o mergulho da árvore geradora de métrica em \mathbb{Z} , para podermos utilizar o Teorema 3.2, falta mostrar que o modelo em \mathbb{Z} é invariante por translação e que ele satisfaz a condição de energia positiva finita.

Informalmente, agora vamos provar que o mergulho da árvore é feito de forma estacionária. Considerando $N = 2$, defina $A_n := \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ para todo $n = 0, 1, 2, \dots$. Observe que para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$, existe um único k tal que $|x - y| \in A_k \setminus A_{k-1}$. O valor de k é a distância mínima entre x e y no mergulho da árvore em \mathbb{Z} .

Defina $D(x, y)$ a variável aleatória que atribui a distância entre os vértices $x, y \in \mathbb{Z}$. Temos que

$$P(D(x, y) = l) = \left(\frac{1}{2}\right)^{l-k+1},$$

em que $l \geq k$ e k é a distância mínima na árvore entre x e y . Note que a função de distribuição de $D(x,y)$ depende somente da distância euclidiana entre x e y , ou seja, ela não depende da distância $d(x,y)$ definida na Seção 1.2. Então, a distribuição de D é invariante por translações inteiras da árvore, o que implica que o mergulho da árvore que gera a métrica em \mathbb{Z} nos dá uma árvore de maneira estacionária.

Formalmente, considere o espaço de probabilidade $([0,1], \mathbb{B}[0,1], \lambda)$, em que λ é a medida de Lebesgue e $\mathbb{B}[0,1]$ é a σ -álgebra de Borel no intervalo $[0,1]$. Para um elemento $\gamma \in [0,1]$, considere sua expansão N -ádica $\gamma = 0.\gamma_1\gamma_2\dots$, ou seja, $\gamma = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i N^{-i}$, em que $\gamma_i \in \{0, \dots, N-1\}$ para todo $i \geq 1$. Os valores para γ que não têm uma expansão única serão desconsiderados, mesmo porque o conjunto desses elementos tem medida nula.

Cada $\gamma = 0.\gamma_1\gamma_2\dots \in [0,1]$ representa uma árvore em \mathbb{Z} . Como já foi visto no mergulho da árvore geradora de métrica em \mathbb{Z} , para todo $n \in \mathbb{N}$, cada bola $\mathcal{B}_n(0)$ contém N bolas de raio $n-1$ e, dentre elas, está $\mathcal{B}_{n-1}(0)$. A associação entre γ e uma árvore em \mathbb{Z} é feita da seguinte forma: para todo $n \in \mathbb{N}$, a bola $\mathcal{B}_{n-1}(0)$ será a $(\gamma_n + 1)$ -ésima bola contida em $\mathcal{B}_n(0)$, contando da esquerda para a direita.

Exemplo 2 Considerando $N = 2$, $\gamma = 0.0110\dots$ representa a árvore da Figura 3.3. Note que a origem é o primeiro vértice de $\mathcal{B}_1(0)$, logo $\gamma_1 = 0$. Entretanto, $\mathcal{B}_1(0)$ é a segunda bola de raio 1 em $\mathcal{B}_2(0)$. O mesmo ocorre com $\mathcal{B}_2(0)$ contida em $\mathcal{B}_3(0)$. Assim $\gamma_2 = \gamma_3 = 1$.

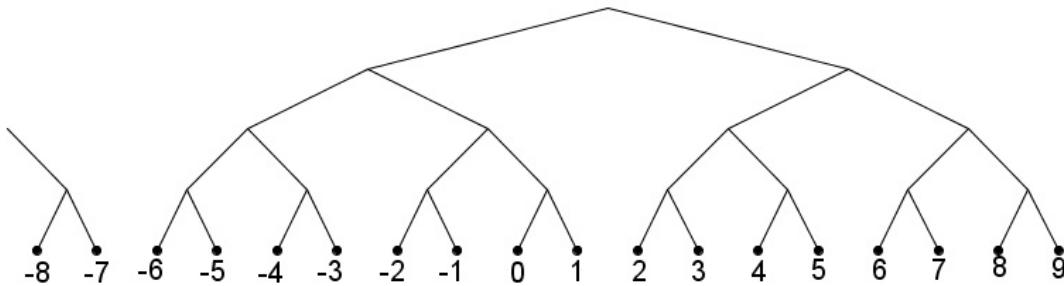


Figura 3.3: Caso $N = 2$ e $\gamma = 0.0110\dots$

O mapa $\phi : [0,1] \rightarrow \mathcal{T}$, onde \mathcal{T} é o conjunto das árvores geradoras de métrica em \mathbb{Z} , associa um γ a uma árvore $\tau \in \mathcal{T}$. Como γ tem expansão N -ádica única, exceto em um conjunto de medida nula, o mapa ϕ tem inversa em um conjunto de medida 1.

Agora vamos apresentar a transformação $S : [0,1] \rightarrow [0,1]$ explicitamente. Essa transformação é tal que se definirmos $T := \phi S \phi^{-1}$, T é um *shift* a esquerda no espaço das árvores, ou seja, T desloca a árvore para esquerda em uma unidade.

Para escrevermos a transformação S , vamos definir $Y(\gamma) := \min\{i : \gamma_i \neq N - 1\}$, isto é, $Y(\gamma)$ é o primeiro γ_i que não é igual a $N - 1$. Observe que se $\gamma_j = N - 1$, então a bola $\mathcal{B}_{j-1}(0)$ é a última bola de raio $j - 1$ contida na bola $\mathcal{B}_j(0)$. O k -ésimo dígito de $S(\gamma)$, denotado por $S(\gamma)_k$ é dado por:

$$S(\gamma)_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k < Y(\gamma), \\ \gamma_k + 1 & \text{se } k = Y(\gamma), \\ \gamma_k & \text{se } k > Y(\gamma). \end{cases}$$

Exemplo 3 Considere $N = 2$ e seja $\gamma = 0.1001\dots \in [0,1]$. Temos que $Y(\gamma) = 2$ e, portanto, $S(\gamma)_1 = 0$, $S(\gamma)_2 = 1$ e $S(\gamma)_k = \gamma_k$ para todo $k \geq 3$. Então, $S(\gamma) = 0.0101\dots$. Na Figura 3.4, a árvore $\tau = \phi^{-1}(\gamma)$ e $T(\tau) = \phi^{-1}(S(\gamma))$. Note que a árvore deslocou uma unidade para a esquerda.

Note que a transformação S tem inversa, exceto em um conjunto de medida nula. Então, para $\gamma \in [0,1]$, $S^{-1}(\gamma)_k$, ou seja, o k -ésimo dígito de $S^{-1}(\gamma)$ é dado por:

$$S^{-1}(\gamma)_k = \begin{cases} N - 1 & \text{se } k < Y'(\gamma), \\ \gamma_k - 1 & \text{se } k = Y'(\gamma), \\ \gamma_k & \text{se } k > Y'(\gamma), \end{cases}$$

em que $Y'(\gamma) = \min\{i : \gamma_i \neq 0\}$.

Agora vamos provar que a medida μ definida na semi-álgebra \mathcal{S} dos eventos cilín-

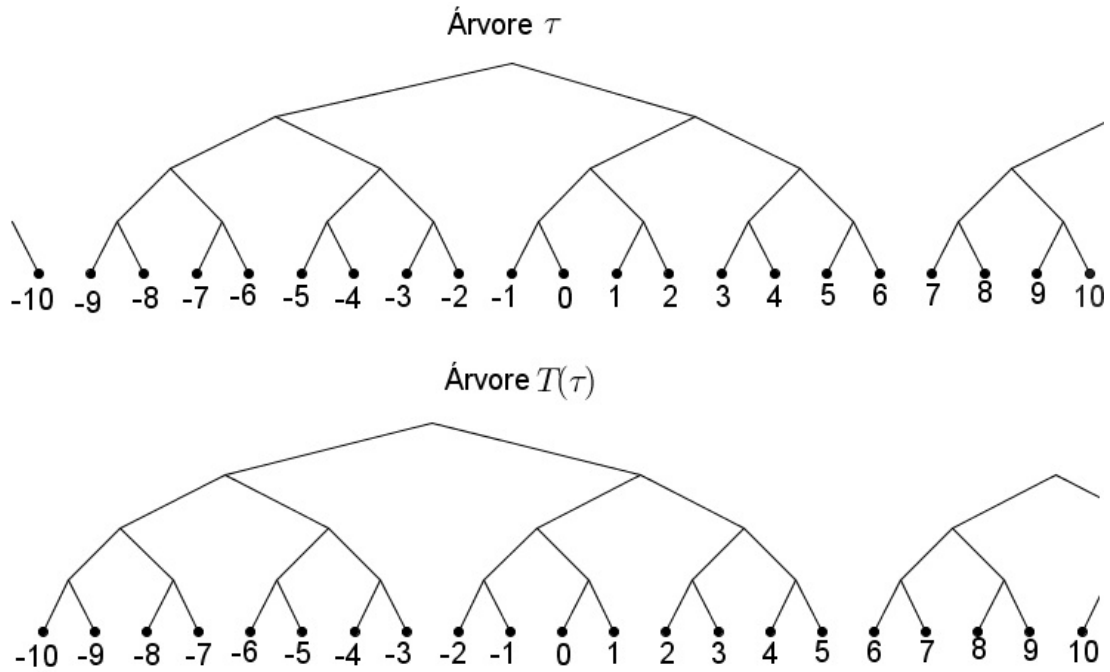


Figura 3.4: A primeira árvore é a representada por $\gamma = 0,1001\dots$ e a segunda árvore é representada por $S(\gamma)$.

dricos é invariante pela transformação S . Seja $C(0, \gamma'_1, \dots, \gamma'_k) = \{x \in [0,1] : x_1 = \gamma'_1, \dots, x_k = \gamma'_k\}$, um cilindro em \mathcal{S} . Note que, pela construção do mergulho da árvore geradora de métrica em \mathbb{Z} , $\mu(C(0, \gamma'_1, \dots, \gamma'_k)) = \frac{1}{N^k}$. Queremos provar que $\mu(C(0, \gamma'_1, \dots, \gamma'_k)) = \mu(S^{-1}(C(0, \gamma'_1, \dots, \gamma'_k)))$.

Se $l = Y'(\gamma)$ for menor ou igual a k , então

$$S^{-1}(C(0, \gamma'_1, \dots, \gamma'_k)) = C(0, N-1, \dots, N-1, \gamma'_l-1, \gamma'_{l+1}, \dots, \gamma'_k).$$

Logo,

$$\mu(S^{-1}(C(0, \gamma'_1, \dots, \gamma'_k))) = \mu(C(0, N-1, \dots, N-1, \gamma'_l-1, \gamma'_{l+1}, \dots, \gamma'_k)) = \frac{1}{N^k}.$$

Por outro lado, se $k < Y'(\gamma)$, então existe $l = Y'(\gamma)$ tal que,

$$S^{-1}(C(0, \gamma'_1, \dots, \gamma'_l)) = C(0, N-1, \dots, N-1, \gamma'_l - 1).$$

Isso implica que

$$\begin{aligned} \mu(S^{-1}(C(0, \gamma'_1, \dots, \gamma'_l))) &= \mu(C(0, N-1, \dots, N-1, \gamma'_l - 1)) \\ &= \frac{1}{N^l} = \mu(C(0, \gamma'_1, \dots, \gamma'_l)). \end{aligned}$$

Portanto, a medida μ é invariante por S . Como a semi-álgebra \mathcal{S} gera a σ -álgebra $\mathbb{B}[0,1]$, pelo Teorema de Extensão de Hahn-Kolmogorov, existe uma única medida que estende μ na σ -álgebra $\mathbb{B}[0,1]$ e essa medida é λ , a medida de Lebesgue em $[0,1]$. Então, pelo Lema A.0.8 λ é invariante por S . Associando ao espaço de probabilidade das árvores, a medida de probabilidade nesse espaço é invariante por T . Então, o mergulho da árvore em \mathbb{Z} é estacionário.

Agora, afirmamos que todo o processo de percolação no grafo hierárquico pode ser realizado de maneira estacionária.

A cada elo e da árvore, associamos uma variável aleatória $U_e \sim \text{Uniforme}[0,1]$. Dada uma árvore representada por γ e uma configuração ω , dizemos que o elo e está aberto se $U_e(\omega, \gamma) \leq 1 - \exp\{-\alpha\beta^{-|e|_\gamma}\}$, onde $|e|_\gamma$ é o comprimento do elo e na árvore representada por γ . No mergulho da árvore em \mathbb{Z} , vimos que a variável aleatória $|e|$ tem a mesma função de distribuição para todo γ . Então, como U_e só depende do comprimento $|e|$, o processo de percolação foi mergulhado de forma estacionária.

Com respeito a condição de energia positiva finita, como cada par de vértices pode se conectar de maneira independente e com probabilidade positiva, a condição é satisfeita.

Vamos mostrar agora que a construção do processo de percolação em \mathbb{Z} é, também, ergódico. Para mostrar esse resultado, primeiro vamos provar que a medida de Lebesgue é ergódica com respeito a S .

Lema 3.0.1 *A medida de Lebesgue em $[0,1]$, λ , é ergódica com respeito a transformação S .*

Para demonstrar esse lema, vamos estudar a ação das iteradas de S em $\gamma \in [0,1]$. Para ilustrar isso, considere o seguinte exemplo para o caso $N = 3$.

Exemplo 4 *Seja $\gamma = 0,12100\dots$. Inicialmente, vamos observar o que acontece com os primeiros dígitos da expansão N -ádica de γ em $\gamma := S^0(\gamma), S^1(\gamma), S^1(\gamma), \dots$. Note que $S^0(\gamma)_1 = \gamma_1 = 1$, $S^1(\gamma)_1 = 2$, $S^2(\gamma)_1 = 0$, $S^3(\gamma)_1 = 1$ e assim por diante. Então, os primeiros dígitos de $S^0(\gamma), S^1(\gamma), S^1(\gamma), \dots$ seguem o padrão periódico: $1, 2, 0, 1, 2, 0, \dots$. Logo, a cada iterada de S , somamos 1 ao primeiro dígito no módulo 3, ou seja, $S^{i+1}(\gamma)_1 = (1 + S^i(\gamma)_1) \bmod 3$, para todo $i = 0, 1, 2, \dots$.*

Agora, observe o comportamento dos segundos dígitos de $S^0(\gamma), S^1(\gamma), S^1(\gamma), \dots$. Diferente do que ocorre com o primeiro dígito, só somamos 1 a $S^i(\gamma)_2$, em módulo 3, se $S^{i-1}(\gamma)_1 = 2$. De forma geral, só somamos 1 ao $k + 1$ -ésimo dígito de $S^i(\gamma)$ se $S^{i-1}(\gamma)_k = 2$.

Portanto, para qualquer $N \geq 2$, e $\gamma \in [0,1]$, o primeiro dígito da expansão N -ádica de $S^0(\gamma), S^1(\gamma), S^1(\gamma), \dots$ segue um padrão periódico $0, 1, 2, \dots, N-1, 0, 1, 2, \dots$, começando por algum número do conjunto $\{0, 1, 2, \dots, N-1\}$. Para $k \geq 2$, só adicionamos 1, em módulo N , ao k -ésimo dígito de $S^i(\gamma)$ se $S^{i-1}(\gamma)_{k-1} = N-1$.

Segue desse argumento que, iterando S , γ visita qualquer intervalo N -ádico $I_{m,k} = [kN^{-m}, (k+1)N^{-m}]$, com $k \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ e $m \in \mathbb{N}$, com frequência N^{-m} . Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} I(S^i(\gamma) \in I_{m,k}) = N^{-m}. \quad (3.1)$$

Defina \mathcal{M} a coleção de medidas de probabilidade invariantes por S . $\mathcal{M} \neq \emptyset$ pois,

como já foi demonstrado anteriormente, a medida de Lebesgue em $[0,1]$ pertence a \mathcal{M} . Vimos no Apêndice A que o conjunto \mathcal{M} é convexo e seus pontos extremais são as medidas ergódicas com respeito a S . Já vimos que $\mathcal{M} \neq \emptyset$, logo há pelo menos uma medida de probabilidade ergódica \mathcal{M} .

Vamos supor que $\nu \in \mathcal{M}$ é ergódica. Pelo Teorema Ergódico de Birkhoff-Khinchin,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} I(S^i(\gamma) \in I_{m,k}) = \nu(I_{m,k}).$$

Mas, por (3.1), $\nu(I_{m,k}) = N^{-m} = \lambda(I_{m,k})$. Pelo Teorema A.1, a medida de Lebesgue é única, portanto $\nu = \lambda$, concluindo que λ é ergódico com respeito a S .

□

A seguir será apresentado um teorema sem demonstração.

Teorema 3.3 *O mergulho do processo de percolação no grafo hierárquico em \mathbb{Z} é ergódico.*

Capítulo 4

Lei dos grandes números para θ

Como consequência do Teorema 3.3, temos o próximo teorema. Ele garante com algumas condições que, no limite, a proporção de vértices que pertencem ao maior aglomerado aberto da origem, restrito à bola $\mathcal{B}_k(0)$, tem ordem superior a $\theta := \theta(\alpha, \beta)$ quase certamente.

Teorema 4.1 *Se α e β são tais que $\theta := \theta(\alpha, \beta) > 0$, então para todo $\varepsilon > 0$,*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\alpha, \beta}(|\mathcal{C}_k^m(0)| > (\theta - \varepsilon)N^k) = 1.$$

A demonstração desse resultado será feita apenas para o caso em que $\beta \geq N$. O caso em que $0 < \beta < N$ segue do caso em que $\beta = N$. Isto porque, pela demonstração do Teorema 2.1 parte (a), $\theta(\alpha, \beta) = 1$ sempre que $\alpha > 0$ e $\beta \in (0, N]$ e pelo acoplamento feito na Seção 1.2 temos que $\mathbb{P}_{\alpha, \beta}(|\mathcal{C}_k^m(0)| > (\theta - \varepsilon)N^k)$ cresce quando β decresce. Portanto, se for provado que $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\alpha, \beta}(|\mathcal{C}_k^m(0)| > (\theta - \varepsilon)N^k) = 1$ quando $\beta \geq N$, então o resultado também valerá para $\beta > 0$.

A prova deste teorema será realizada em três passos:

Passo 1: Provar que para toda constante $K > 0$, a função indicadora

$$I(\{|\mathcal{C}(0)| = \infty\} \cap \{|\mathcal{C}_n(0)| < K(\beta/N)^n\}) \text{ converge q.c. para } 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Passo 2: Provar que a fração de vértices em $\mathcal{B}_n(0)$ que estão em aglomerados de tamanho maior ou igual a $K(\beta/N)^n$ converge quase certamente para θ quando $n \rightarrow \infty$.

Passo 3: Usar os dois passos anteriores para demonstrar o teorema.

Passo 1

Quando $\beta = N$, os eventos $(|\mathcal{C}_n(0)| < K(N/N)^n)_{n \geq 1} = (|\mathcal{C}_n(0)| < K)_{n \geq 1}$ são decrescentes e $\mathbb{P}_{\alpha, \beta}(\bigcap_{n=1}^{\infty} |\mathcal{C}_n(0)| < K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\alpha, \beta}(|\mathcal{C}_n(0)| < K)$. Contudo, se $\beta = N$, pelo Teorema 2.1(a), o grau da origem é infinito quase certamente, logo $\mathbb{P}_{\alpha, \beta}(\bigcap_{n=1}^{\infty} |\mathcal{C}_n(0)| < K) = 0$, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\alpha, \beta}(|\mathcal{C}_n(0)| < K) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\alpha, \beta}(\{|\mathcal{C}(0)| = \infty\} \cap \{|\mathcal{C}_n(0)| < K\}) = 0.$$

Afirmamos que $I(\{|\mathcal{C}(0)| = \infty\} \cap \{|\mathcal{C}_n(0)| < K\}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ q.c..

Para simplificar a prova dessa afirmação, vamos chamar de A_n o evento

$$\{|\mathcal{C}(0)| = \infty\} \cap \{|\mathcal{C}_n(0)| < K\}.$$

Suponha por absurdo que $I(A_n) \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ q.c.. Neste caso, $\mathbb{P}_{\alpha, \beta}(\{I(A_n) = 1\} \text{ i.v.}) = 1$, ou seja, $\mathbb{P}_{\alpha, \beta}(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \{I(A_n) = 1\}) = 1$.

Como $\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \{I(A_n) = 1\} \subset \bigcup_{n=k}^{\infty} \{I(A_n) = 1\}$ para todo k , temos que

$$1 = \mathbb{P}_{\alpha, \beta}(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \{I(A_n) = 1\}) \leq \mathbb{P}_{\alpha, \beta}(\bigcup_{n=k}^{\infty} \{I(A_n) = 1\}),$$

para todo k . Isso implica que para todo k , existe $k_0 > k$ tal que $\mathbb{P}_{\alpha, \beta}(I(A_{k_0}) = 1) > 0$, isto é, $\mathbb{P}_{\alpha, \beta}(A_{k_0}) > 0$. Absurdo, pois $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\alpha, \beta}(\{|\mathcal{C}(0)| = \infty\} \cap \{|\mathcal{C}_n(0)| < K\}) = 0$.

Para o caso em que $\beta > N$, mostraremos que

$$\mathbb{P}_{\alpha, \beta}(|\mathcal{C}(0)| = \infty \mid |\{n \in \mathbb{N} : |\mathcal{C}_n(0)| \leq K(\beta/N)^n\}| = \infty) = 0. \quad (4.1)$$

Como $|\mathcal{C}_n(0)|$ pode ser finito, a probabilidade do evento $\{|\{n \in \mathbb{N} : |\mathcal{C}_n(0)| \leq K(\beta/N)^n\}| = \infty\}$ é positiva. Observe que (4.1) implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\alpha, \beta} \left(\{|\mathcal{C}(0)| = \infty\} \cap \left\{ |\mathcal{C}_n(0)| < K \left(\frac{\beta}{N} \right)^n \right\} \right) = 0.$$

Isso porque, aplicando o Lema de Fatou, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{P}_{\alpha, \beta} (\{|\mathcal{C}(0)| = \infty\} \mid \{|\{n \in \mathbb{N} : |\mathcal{C}_n(0)| \leq K(\beta/N)^n\}| = \infty\}) \\ &= \mathbb{P}_{\alpha, \beta} \left(\{|\mathcal{C}(0)| = \infty\} \cap \{|\{n \in \mathbb{N} : |\mathcal{C}_n(0)| \leq K(\beta/N)^n\}| = \infty\} \right) \\ &= \mathbb{P}_{\alpha, \beta} \left(\{|\mathcal{C}(0)| = \infty\} \cap \{|\mathcal{C}_n(0)| \leq K(\beta/N)^n \text{ i.v.} \} \right) \\ &= \mathbb{P}_{\alpha, \beta} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \left[\{|\mathcal{C}(0)| = \infty\} \cap \{|\mathcal{C}_n(0)| \leq K(\beta/N)^n\} \right] \right) \\ &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\alpha, \beta} \left(\{|\mathcal{C}(0)| = \infty\} \cap \{|\mathcal{C}_n(0)| \leq K(\beta/N)^n\} \right) \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\alpha, \beta} \left(|\mathcal{C}(0)| = \infty \cap \left\{ |\mathcal{C}_n(0)| < K \left(\frac{\beta}{N} \right)^n \right\} \right). \end{aligned}$$

Sabendo que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\alpha, \beta} \left(|\mathcal{C}(0)| = \infty \cap \left\{ |\mathcal{C}_n(0)| < K \left(\frac{\beta}{N} \right)^n \right\} \right) = 0$, a demonstração de que $I(\{|\mathcal{C}(0)| = \infty\} \cap \{|\mathcal{C}_n(0)| < K(\beta/N)^n\}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ segue de maneira semelhante a prova do caso $\beta = N$.

Então nosso objetivo agora é provar que a igualdade (4.1) é verdadeira. Para isso, suponha a existência de infinitos $n \in \mathbb{N}$ tais que $|\mathcal{C}_n(0)| \leq K(\beta/N)^n$, defina n_1 como o menor n tal que $|\mathcal{C}_n(0)| \leq K(\beta/N)^n$. Se $\mathcal{C}_{n_1}(0) \leftrightarrow \overline{\mathcal{B}_{n_1}(0)}$, então o aglomerado aberto da origem é finito e a probabilidade em (4.1) é zero. Mas supondo que $\mathcal{C}_{n_1}(0) \not\leftrightarrow \overline{\mathcal{B}_{n_1}(0)}$, seja n_2 o menor $n > n_1$ tal que $\mathcal{C}_{n_1}(0) \leftrightarrow \overline{\mathcal{B}_n(0)}$ e $|\mathcal{C}_n(0)| \leq K(\beta/N)^n$. Novamente, se $\mathcal{C}_{n_2}(0) \leftrightarrow \overline{\mathcal{B}_{n_2}(0)}$, então o aglomerado da origem é finito. Portanto, sempre que $\mathcal{C}_{n_i}(0) \leftrightarrow \overline{\mathcal{B}_{n_i}(0)}$, defina $n_{i+1} = \min\{n > n_i : \mathcal{C}_{n_i}(0) \leftrightarrow \overline{\mathcal{B}_n(0)} \text{ e } |\mathcal{C}_n(0)| \leq K(\beta/N)^n\}$. O objetivo é provar que existirá quase certamente um n_i tal que $\mathcal{C}_{n_i}(0) \leftrightarrow \overline{\mathcal{B}_{n_i}(0)}$.

Por definição, $|\mathcal{C}_{n_i}(0)| \leq K(\beta/N)^{n_i}$ para todo n_i . Então:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_{\alpha,\beta}(\mathcal{C}_{n_i}(0) \leftrightarrow \overline{\mathcal{B}_{n_i}(0)}) &\leq \mathbb{P}_{\alpha,\beta}\left(\mathcal{C}_{n_i}(0) \leftrightarrow \overline{\mathcal{B}_{n_i}(0)} \mid |\mathcal{C}_{n_i}(0)| = \left\lfloor K \left(\frac{\beta}{N}\right)^{n_i} \right\rfloor\right) \\
 &= 1 - \mathbb{P}_{\alpha,\beta}\left(\mathcal{C}_{n_i}(0) \not\leftrightarrow \overline{\mathcal{B}_{n_i}(0)} \mid |\mathcal{C}_{n_i}(0)| = \left\lfloor K \left(\frac{\beta}{N}\right)^{n_i} \right\rfloor\right) \\
 &= 1 - \prod_{j=n_i+1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\alpha}{\beta^j}\right\}^{\lfloor K(\frac{\beta}{N})^{n_i} \rfloor (N-1)N^{j-1}} \\
 &\leq 1 - \prod_{j=n_i+1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\alpha(N-1)K}{N} \left(\frac{\beta}{N}\right)^{n_i} \left(\frac{N}{\beta}\right)^j\right\} \\
 &= 1 - \exp\left\{-\frac{\alpha(N-1)K}{N} \left(\frac{\beta}{N}\right)^{n_i} \sum_{j=n_i+1}^{\infty} \left(\frac{N}{\beta}\right)^j\right\} \\
 &= 1 - \exp\left\{-\frac{\alpha(N-1)K}{N} \left(\frac{\beta}{N}\right)^{n_i} \left(\frac{N}{\beta}\right)^{n_i} \frac{N}{\beta} \frac{\beta}{\beta-N}\right\} \\
 &= 1 - \exp\left\{-\frac{\alpha(N-1)K}{\beta-N}\right\}. \tag{4.2}
 \end{aligned}$$

Pela desigualdade (4.2), $\mathbb{P}_{\alpha,\beta}(\mathcal{C}_{n_i}(0) \leftrightarrow \overline{\mathcal{B}_{n_i}(0)}) > 0$ e não depende de n_i .

Os eventos $\{\mathcal{C}_{n_i}(0) \setminus \mathcal{C}_{n_{i-1}}(0) \leftrightarrow \overline{\mathcal{B}_{n_i}(0)}\}_{i \geq 2}$ são independentes. Pela definição de n_i , $\mathcal{C}_{n_{i-1}}(0) \leftrightarrow \overline{\mathcal{B}_{n_i}(0)}$ para todo i , logo observar se o evento $\{\mathcal{C}_{n_i}(0) \leftrightarrow \overline{\mathcal{B}_{n_i}(0)}\}$ ocorre é o mesmo que ver se $\{\mathcal{C}_{n_i}(0) \setminus \mathcal{C}_{n_{i-1}}(0) \leftrightarrow \overline{\mathcal{B}_{n_i}(0)}\}$ ocorre. Portanto, os eventos $\{\mathcal{C}_{n_i}(0) \leftrightarrow \overline{\mathcal{B}_{n_i}(0)}\}_{i \geq 1}$ também são independentes.

Pelo Lema de Borel-Cantelli, $\mathbb{P}(\{\mathcal{C}_{n_i}(0) \leftrightarrow \overline{\mathcal{B}_{n_i}(0)}\} \text{ i.v. }) = 1$, portanto existirá n_i tal que $\mathcal{C}_{n_i}(0) \leftrightarrow \overline{\mathcal{B}_{n_i}(0)}$ quase certamente. Isto é, dado que existam infinitos $n \in \mathbb{N}$ tais que $|\mathcal{C}_n(0)| \leq K(\beta/N)^n$, a probabilidade do aglomerado da origem ser infinito é zero, como queríamos mostrar. □

Passo 2

O mergulho aleatório do grafo hierárquico em \mathbb{Z} que foi apresentado na demonstração do Teorema 3.1 será utilizado na demonstração do segundo passo. Relembrando, no

mergulho aleatório, a bola $\mathcal{B}_n(0)$ era representada por N^n inteiros consecutivos que poderiam estar entre $-N^n$ e N^n .

A fração de vértices entre $-N^n$ e N^n em \mathbb{Z} que estão em um aglomerado de tamanho maior do que $K(\beta/N)^n$ é representado por $A(n)$, ou seja,

$$A(n) := \frac{1}{2N^n + 1} \sum_{x=-N^n}^{N^n} I(\{|\mathcal{C}_n(x)| > K(\beta/N)^n\}).$$

Seja $k \in \mathbb{N} \cap [0, n]$. Como $\beta/N \geq 1$, temos

$$\begin{aligned} A(n) &\leq \frac{1}{2N^n + 1} \sum_{x=-N^n}^{N^n} I(\{|\mathcal{C}(x)| > K(\beta/N)^n\}) \\ &\leq \frac{1}{2N^n + 1} \sum_{x=-N^n}^{N^n} I(\{|\mathcal{C}(x)| > K(\beta/N)^k\}). \end{aligned}$$

Foi visto no Teorema 3.3 que o mergulho de todo o processo de percolação em \mathbb{Z} é ergódico e o grafo é invariante por translação, logo pelo Teorema Ergódico de Birkhoff-Khinchin,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2N^n + 1} \sum_{x=-N^n}^{N^n} I(\{|\mathcal{C}(x)| > K(\beta/N)^k\}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\alpha, \beta} \left(I(\{|\mathcal{C}(x)| > K(\beta/N)^k\}) \right) \text{ q.c.} \\ &= \mathbb{P}_{\alpha, \beta}(|\mathcal{C}(x)| > K(\beta/N)^k) \\ &= \mathbb{P}_{\alpha, \beta}(|\mathcal{C}(0)| > K(\beta/N)^k) \text{ para todo } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Se $\beta = N$, então $\mathbb{P}_{\alpha, \beta}(|\mathcal{C}(0)| > K) = 1$ pois $\mathbb{P}_{\alpha, \beta}(|\mathcal{C}(0)| = \infty) = \theta(\alpha, N) = 1$, pelo Teorema 2.1(a). Logo $\mathbb{P}_{\alpha, \beta}(|\mathcal{C}(0)| > K) = \theta(\alpha, \beta)$ quando $\beta = N$. Se $\beta > N$, os eventos $\{|\mathcal{C}(0)| > K(\beta/N)^k\}_{k \geq 1}$ são decrescentes pois

$$\{|\mathcal{C}(0)| > K(\beta/N)^{k+1}\} \subset \{|\mathcal{C}(0)| > K(\beta/N)^k\}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\bigcap_{k=1}^{\infty} \{|\mathcal{C}(0)| > K(\beta/N)^k\} = \{|\mathcal{C}(0)| = \infty\}$, então

$\mathbb{P}_{\alpha,\beta}(|\mathcal{C}(0)| > K(\beta/N)^k) \searrow \theta(\alpha,\beta)$ quando $k \rightarrow \infty$.

Em particular, para todo $\omega \in T_0$, em que $\mathbb{P}_{\alpha,\beta}(T_0) = 1$, e para todo $\varepsilon > 0$ temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(n, \omega) < \theta + \varepsilon,$$

ou seja, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $A(n, \omega) < \theta + \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Isso é o mesmo que dizer que $I(A(n, \omega) < \theta + \varepsilon) = 1$ para todo $n \geq n_0$. Em outras palavras

$$I(A(n) - \theta < \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \text{ q.c.} \quad (4.3)$$

De forma semelhante será provado que $I(A(n) - \theta > -\varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ quase certamente.

Sabe-se que para todo $k \in \mathbb{N} \cap [0, n]$

$$\cap_{j=k}^{\infty} \{|\mathcal{C}_j(x)| > K(\beta/N)^j\} \subset \cap_{j=k}^n \{|\mathcal{C}_j(x)| > K(\beta/N)^j\} \subset \{|\mathcal{C}_n(x)| > K(\beta/N)^n\}.$$

Então $I\left(\cap_{j=k}^{\infty} \{|\mathcal{C}_j(x)| > K(\beta/N)^j\}\right) \leq I(|\mathcal{C}_n(x)| > K(\beta/N)^n)$ o que implica que:

$$A(n) \geq \frac{1}{2N^n + 1} \sum_{x=-N^n}^{N^n} I\left(\cap_{j=k}^{\infty} \{|\mathcal{C}_j(x)| > K(\beta/N)^j\}\right).$$

Usando novamente o Teorema 3.3, o Teorema Ergódico de Birkhoff-Khinchin e que o grafo é invariante por translação, temos que

$$\frac{1}{2N^n + 1} \sum_{x=-N^n}^{N^n} I\left(\cap_{j=k}^{\infty} \{|\mathcal{C}_j(x)| > K(\beta/N)^j\}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\alpha,\beta}(\cap_{j=k}^{\infty} \{|\mathcal{C}_j(0)| > K(\beta/N)^j\}) \text{ q.c.}$$

Denote $B_j = \{|\mathcal{C}_j(0)| > K(\beta/N)^j\}$. Como, para $\beta > N$, $\cap_{j=k}^{\infty} B_j \subset \{|\mathcal{C}(0)| = \infty\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, temos $\mathbb{P}_{\alpha,\beta}(\cap_{j=k}^{\infty} B_j) \leq \mathbb{P}_{\alpha,\beta}(|\mathcal{C}(0)| = \infty) = \theta(\alpha,\beta)$.

Além disto, para todo $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\alpha,\beta}(\cap_{j=k}^{\infty} B_j) &= \theta(\alpha,\beta) - \mathbb{P}_{\alpha,\beta}(\{|\mathcal{C}(0)| = \infty\} \cap \{\cup_{j=k}^{\infty} B_j^c\}) \\ &= \theta(\alpha,\beta) - \mathbb{P}_{\alpha,\beta}(\cup_{j=k}^{\infty} [\{|\mathcal{C}(0)| = \infty\} \cap B_j^c]). \end{aligned}$$

Veja que

$$\begin{aligned} \{|\mathcal{C}(0)| = \infty\} \cap \{\cup_{j=k}^{\infty} B_j^c\} &\downarrow \cap_{k=1}^{\infty} \cup_{j=k}^{\infty} \{|\mathcal{C}(0)| = \infty\} \cap B_j^c \\ &= \{|\mathcal{C}(0)| = \infty\} \cap B_j^c \text{ i.v. } \}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\alpha,\beta}(\{|\mathcal{C}(0)| = \infty\} \cap \{\cup_{j=k}^{\infty} B_j^c\}) = \mathbb{P}_{\alpha,\beta}(\{|\mathcal{C}(0)| = \infty\} \cap B_j^c \text{ i.v.}).$$

Mas vimos no primeiro passo que $\mathbb{P}_{\alpha,\beta}(\{|\mathcal{C}(0)| = \infty\} \cap B_j^c \text{ i.v.}) = 0$, isto é, $\mathbb{P}(\cap_{j=k}^{\infty} B_j) \nearrow \theta(\alpha,\beta)$ quando $\beta \geq N$ e $k \rightarrow \infty$.

Como anteriormente, temos que para todo $\varepsilon > 0$ e $\omega \in T_1$, em que $\mathbb{P}_{\alpha,\beta}(T_1) = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} A(n,\omega) > \theta - \varepsilon$, isto é, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $A(n,\omega) > \theta - \varepsilon$ para todo $n \geq n_1$. Isso implica que $I(\{A(n,\omega) > \theta - \varepsilon\}) = 1$ para todo $n \geq n_1$. Em outras palavras temos que

$$I(\{A(n) > \theta - \varepsilon\}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \text{ q.c. } . \quad (4.4)$$

As duas desigualdades (4.3) e (4.4) implicam que para todo $\varepsilon > 0$ existe n_0 grande suficiente tal que para todo $n > n_0$, $|A(n) - \theta| < \varepsilon$ quase certamente. Isto é, existe T com $P(T) = 1$ tal que para todo $\omega \in T$ temos

$$A(n,\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \theta \text{ quase certamente.} \quad (4.5)$$

Como já foi dito anteriormente, o mergulho aleatório da bola $\mathcal{B}_n(0)$ em \mathbb{Z} tem como imagem um conjunto contido em $\{-N^n, -N^n+1, \dots, N^n\}$. Uma vez que a quantidade de vértices na bola $\mathcal{B}_n(0)$ é N^n , esse conjunto imagem contém uma fração $\frac{N^n}{2N^n+1}$ de vértices daquele conjunto.

Note que se considerarmos os vértices x e y tais que $\mathcal{B}_n(x) \cap \mathcal{B}_n(y) = \emptyset$, então os eventos $\{|\mathcal{C}_n(x)| > K(\beta/N)^n\}$ e $\{|\mathcal{C}_n(y)| > K(\beta/N)^n\}$ são independentes. Desse modo se definirmos

$$A_1(n) := \frac{1}{2N^n + 1} \sum_{x \in \mathcal{B}_n(0)} I(|\mathcal{C}_n(x)| > K(\beta/N)^n)$$

$$A_2(n) := A(n) - A_1(n),$$

então as variáveis aleatórias $A_1(n)$ e $A_2(n)$ são independentes. Como vimos em (4.5), $A_1(n) + A_2(n) = A(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \theta$ q.c.. Note que, para n grande, $2N^n + 1 \approx 2N^n$, que é o dobro do número de vértices que pertencem a bola $\mathcal{B}_n(0)$. Então se provarmos que $A_1(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \theta/2$ q.c., mostramos que a fração de vértices em $\mathcal{B}_n(0)$ que estão em um aglomerado de tamanho maior que $K(\beta/N)^n$ converge quase certamente para θ quando $n \rightarrow \infty$.

Para mostrar isso, se provarmos que $A_1(n)$ converge quase certamente para uma constante, então o valor esperado também deve convergir para uma constante. Mas temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(A_2(n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(A_1(n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N^n}{2N^n + 1} P(|\mathcal{C}_n(x)| > K(\beta/N)^n) = \theta/2.$$

Portanto $A_1(n) \rightarrow \theta/2$ quando $n \rightarrow \infty$.

Já foi dito antes que as variáveis aleatórias $A_1(n)$ e $A_2(n)$ são independentes e que $P(\lim_{n \rightarrow \infty} [A_1(n) + A_2(n)] = \theta) = 1$. Gostaríamos de mostrar que

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_1(n) = c) = 1,$$

onde c é uma constante.

Seja $X := \lim_{n \rightarrow \infty} A_1(n)$ e $Y := \lim_{n \rightarrow \infty} A_2(n)$. Sabemos que $\mathbb{P}(X + Y = \theta) = 1$ e X e Y são independentes. Formalmente, considerando os espaços de probabilidade $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ e $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2, P_1 \times P_2)$, onde $P_1 \times P_2 := P$ é a medida produto em $\Omega_1 \times \Omega_2$, defina

$$(X, Y) : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow [0, 1]$$

$$(X, Y)(\omega_1, \omega_2) = X(\omega_1) + Y(\omega_2),$$

e considere os conjuntos:

- $E = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2 : X(\omega_1) + Y(\omega_2) = \theta\}$;
- $E_{\omega_1} = \{\omega_2 \in \Omega_2 : X(\omega_1) + Y(\omega_2) = \theta\}$;
- $E_{\omega_2} = \{\omega_1 \in \Omega_1 : X(\omega_1) + Y(\omega_2) = \theta\}$.

Note que $P(E) = 1$. Pelo Teorema de Tonelli [3], temos

$$\int_{\Omega_1} P_2(E_{\omega_1}) dP_1 = \int_{\Omega_2} P_1(E_{\omega_2}) dP_2 = P(E) = 1.$$

Suponha por absurdo que P_1 , por exemplo, seja não degenerada e defina $l = \max_{\omega_2 \in \Omega_2} P_1(E_{\omega_2})$. Então temos que $l < 1$. Desse modo,

$$1 = \int_{\Omega_2} P_1(E_{\omega_2}) dP_2 < \int_{\Omega_2} l dP_2 = l < 1.$$

Absurdo. Assim $X = c$, P_1 -q.c., em que c é alguma constante. Observe que esse argumento também vale para a variável Y .

□

Passo 3

No passo 3 combinaremos os dois resultados encontrados nas etapas anteriores para finalmente provar o Teorema 4.1. Para isso, será usado um grafo N -partido da seguinte maneira. Informalmente, considere os aglomerados abertos na bola $\mathcal{B}_{n+1}(0)$ que tenham tamanho maior que $K(\beta/N)^n$. Agora divida esses aglomerados em componentes de tamanho $\lceil K(\beta/N)^n \rceil$. Mais adiante explicaremos o que acontece com os vértices restantes dessa divisão. Esses *clusters* de tamanho $\lceil K(\beta/N)^n \rceil$ serão chamados de meta-vértices. Se dois meta-vértices estão na mesma bola de raio n , então eles nunca estarão conectados. Contudo se eles estão em bolas de raio n distintas, então eles estarão conectados se, somente se, existir um elo de comprimento $n + 1$ conectando os dois aglomerados que representam esses meta-vértices. Mostraremos que se K e n forem suficientemente grandes, então o maior *cluster* no grafo N -partido tem uma fração de meta-vértices próxima de 1. Isso implicará que a fração de vértices no grafo original que está no maior aglomerado de $\mathcal{B}_{n+1}(0)$ é próxima de θ .

Vimos no passo 2 que a fração de vértices de $\mathcal{B}_n(0)$ que está em um aglomerado de tamanho maior que $K(\beta/N)^n$ converge para θ , quase certamente, quando $n \rightarrow \infty$, para todo $K > 0$. Isto é, para n grande e $\varepsilon_0 > 0$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{|\{x \in \mathcal{B}_n(0) : |\mathcal{C}_n(0)| > K(\beta/N)^n\}|}{N^n} - \theta \right| < \varepsilon_0 \quad \text{q.c.} \\ \Rightarrow & |\{x \in \mathcal{B}_n(0) : |\mathcal{C}_n(0)| > K(\beta/N)^n\}| > (\theta - \varepsilon_0)N^n \quad \text{q.c..} \end{aligned}$$

Isso implica que para todo $\varepsilon_1 > 0$

$$\mathbb{P}_{\alpha, \beta}(|\{x \in \mathcal{B}_n(0) : |\mathcal{C}_n(0)| > K(\beta/N)^n\}| > (\theta - \varepsilon_0)N^n) > 1 - \varepsilon_1.$$

Seja $\varepsilon = \max\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$, então temos que

$$\mathbb{P}_{\alpha, \beta}(|\{x \in \mathcal{B}_n(0) : |\mathcal{C}_n(x)| > K(\beta/N)^n\}| > (\theta - \varepsilon)N^n) > 1 - \varepsilon.$$

Considere agora que $\varepsilon > 0$ seja fixo. A bola $\mathcal{B}_n(y)$ será chamada *boa* se

$$|\{x \in \mathcal{B}_n(y); |\mathcal{C}_n(x)| > K(\beta/N)^n\}| > (\theta - \varepsilon)N^n. \quad (4.6)$$

Lembre que há N bolas de raio n dentro de uma bola de raio $n+1$. Como essas bolas são disjuntas, a coleção de eventos em que tais bolas são *boas* é uma coleção de eventos independentes. A partir de agora todos os cálculos serão condicionados ao evento em que todas as bolas de raio n são *boas*. A probabilidade de todas as bolas de raio n contidas em $\mathcal{B}_{n+1}(0)$ serem *boas* é maior do que $(1 - \varepsilon)^N$, uma vez que há N bolas de raio n contidas em $\mathcal{B}_{n+1}(0)$. Pela desigualdade de Bernoulli, vista no Apêndice C, essa probabilidade é maior do que $1 - N\varepsilon$.

O grafo N -partido é construído da seguinte forma. Seja $\mathcal{B}_n(y)$ uma bola *boa* e considere o seguinte conjunto:

$$\mathcal{B}'_n(y) := \{x \in \mathcal{B}_n(y); |\mathcal{C}_n(x)| > K(\beta/N)^n\}.$$

$\mathcal{B}'_n(y)$ será dividido em meta-vértices da seguinte forma: se $x \in \mathcal{B}'_n(y)$, $\mathcal{C}_n(x)$ será repartido em $\lfloor \frac{|\mathcal{C}_n(x)|}{\lceil K(\beta/N)^n \rceil} \rfloor$ meta-vértices, cada um deles com tamanho maior ou igual a $\lceil K(\beta/N)^n \rceil$. Os vértices que não estão nesses aglomerados serão ignorados inicialmente.

Defina \mathcal{V}_n , o conjunto de vértices do grafo N -partido como a coleção de meta-vértices em $\mathcal{B}_{n+1}(0)$. Antes de introduzirmos o conjunto de elos do grafo N -partido, obteremos uma estimativa para o número de meta-vértices em $\mathcal{B}(y)$. Considere que a bola *boa* $\mathcal{B}_n(y)$ contenha i aglomerados distintos de tamanho maior do que $K(\beta/N)^n$, representados por $\mathcal{C}_n(x_1), \dots, \mathcal{C}_n(x_i)$. A quantidade de meta-vértices em $\mathcal{B}_n(y)$ é dada

por $\sum_{j=1}^n \left\lfloor \frac{|C_n(x_j)|}{\lceil K(\beta/N)^n \rceil} \right\rfloor$. Como a bola $\mathcal{B}_n(y)$ é boa, temos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left\lfloor \frac{|C_n(x_j)|}{\lceil K(\beta/N)^n \rceil} \right\rfloor &> \frac{(\theta - \varepsilon)N^n}{\lceil 2K(\beta/N)^n \rceil} \quad \text{por (4.6)} \\ &\geq \frac{(\theta - \varepsilon)N^n}{\lceil 2K(\beta/N)^n \rceil + 1} \\ &\geq \frac{(\theta - \varepsilon)N^n}{2K(\beta/N)^n + 1} \quad (\text{Como } K \text{ é grande}) \\ &\geq \frac{(\theta - \varepsilon)N^n}{3K(\beta/N)^n} \\ &= \frac{(\theta - \varepsilon)}{3K} \left(\frac{N^2}{\beta} \right)^n. \end{aligned}$$

Logo, se $\mathcal{B}_n(y)$ é uma bola *boa*, ela contém pelo menos $\frac{(\theta - \varepsilon)N^n}{3K(\beta/N)^n}$ meta-vértices.

A construção do conjunto \mathcal{E}_n de elos é feita da seguinte maneira: Considere os primeiros $\lceil K(\beta/N)^n \rceil$ vértices de cada meta-vértice em \mathcal{V}_n , seguindo a ordem dos naturais que é gerada pela função f definida em (1.1). \mathcal{A}_n será o conjunto formado por esses subconjuntos de meta-vértices, note que $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{V}_n$.

Dois meta-vértices $x, y \in \mathcal{V}_n$ estarão conectados por um elo se obedecerem às duas seguintes condições:

- Os vértices de x estão a uma distância igual a $n + 1$ dos vértices de y .
- No grafo original existe pelo menos um elo que conecta algum vértice em $x \cap \mathcal{A}_n$ a algum vértice em $y \cap \mathcal{A}_n$.

Se pelo menos uma dessas duas condições não for satisfeita, não existirá elo em \mathcal{E}_n que conecta os dois meta-vértices x e y . Desse modo temos construído o grafo N -partido $\mathcal{G}_n = (\mathcal{V}_n, \mathcal{E}_n)$.

Uma vez que a hipótese do Teorema 4.1 é de que α e β são tais que $\theta(\alpha, \beta) > 0$, então β deve ser menor que N^2 pois $\alpha_c(\beta) = \infty$ para $\beta \geq N^2$, pelo Teorema 2.1(c). Logo, a quantidade de meta-vértices em $\mathcal{B}_n(x)$, que é maior do que $\frac{(\theta - \varepsilon)N^n}{3K} \left(\frac{N^2}{\beta} \right)^n$, vai para ∞ quando $n \rightarrow \infty$.

Como dito anteriormente, dado um meta-vértice $x \in \mathcal{V}_n$, ele deve se conectar a apenas meta-vértices que estão nas outras $(N - 1)$ bolas *boas* de $\mathcal{B}_{n+1}(0)$. Defina W , a variável aleatória que nos dá o grau de um meta-vértice de \mathcal{V}_n , seu valor esperado será:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W) &\geq (N - 1) \frac{(\theta - \varepsilon)N^{2n}}{3K\beta^n} \left(1 - \exp \left\{ -\frac{\alpha}{\beta^{n+1}} \right\}^{K(\beta/N)^n K(\beta/N)^n} \right) \\ &= (N - 1) \frac{(\theta - \varepsilon)N^{2n}}{3K\beta^n} \left(1 - \exp \left\{ -\frac{\alpha K^2}{\beta^{n+1}} \left(\frac{\beta}{N} \right)^{2n} \right\} \right) \\ &= (N - 1) \frac{(\theta - \varepsilon)N^{2n}}{3K\beta^n} \left(1 - \exp \left\{ -\frac{\alpha K^2}{\beta} \left(\frac{\beta}{N^2} \right)^n \right\} \right). \end{aligned}$$

Como $e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!}$, então para x suficientemente pequeno temos que $e^{-x} \leq 1 - x + x^2/2 \Rightarrow 1 - e^{-x} \geq -x^2/2 + x = x(1 - x/2) \geq x/2$. Uma vez que $\beta/N^2 < 1$, para n suficientemente grande $\frac{\alpha K^2}{\beta} \left(\frac{\beta}{N^2} \right)^n$ fica tão pequeno quanto se queira. Logo,

$$\mathbb{E}(W) \geq (N - 1) \frac{(\theta - \varepsilon)N^{2n}}{3K\beta^n} \cdot \frac{\alpha K^2}{2\beta} \cdot \frac{\beta^n}{N^{2n}} = \frac{(N - 1)(\theta - \varepsilon)\alpha K}{6\beta} := \lambda. \quad (4.7)$$

Esse resultado é válido para qualquer constante $K > 0$, logo o valor esperado para o grau de um meta-vértice pode ser arbitrariamente grande escolhendo K grande.

O grafo N -partido construído aqui pertence à classe dos grafos aleatórios não homogêneos de Bollobás, Jordan e Riordan [4]. Para essa classe de grafos, o grau de cada meta-vértice tem assintoticamente distribuição Poisson com média limitada inferiormente por λ , que foi encontrado em (4.7).

Pode ser visto no Teorema 3.1 de [4] que a única componente gigante de tal grafo N -partido contém, com probabilidade próxima de 1, quando $n \rightarrow \infty$, uma fração ρ de meta-vértices, onde ρ é a maior solução para a equação $1 - \rho = e^{-\lambda\rho}$.

Vimos que λ pode ser arbitrariamente grande, aumentando o valor de K . Logo, para todo $\varepsilon > 0$ e n grande o suficiente, podemos escolher K tal que $\rho > 1 - \varepsilon$. Isso implica que o grafo \mathcal{G}_n contém uma única componente gigante, que contém uma fração

$1 - \varepsilon$ dos vértices em \mathcal{V}_n , com probabilidade maior ou igual a $1 - \varepsilon$.

A fração de vértices de $\mathcal{B}_{n+1}(0)$ que faz parte do conjunto \mathcal{V}_n de meta-vértices é maior do que $\frac{(\theta-2\varepsilon)N^n N}{N+1} = \theta - 2\varepsilon$, onde $(\theta - 2\varepsilon)N^n$ é a quantidade mínima de vértices que estão em aglomerados de tamanho maior do que $\lceil K(\beta/N)^n \rceil$ e N é o número de bolas dentro de $\mathcal{B}_{n+1}(0)$, que tem N^{n+1} vértices. O fator 2 em $(\theta - 2\varepsilon)$ vem do fato de que os tamanhos diferentes de meta-vértices se diferem no máximo por um fator 2.

Assim, pelo Teorema 3.1 em [4], com probabilidade maior do que $1 - \varepsilon$, o maior aglomerado aberto em $\mathcal{B}_{n+1}(0)$ tem tamanho maior do que:

$$(\rho - \varepsilon)(\theta - 2\varepsilon)N^{n+1} > (1 - 2\varepsilon)(\theta - 2\varepsilon)N^{n+1}.$$

Chamando de B o evento em que todas as bolas \mathcal{B}_n de $\mathcal{B}_{n+1}(0)$ são boas, como $\mathbb{P}_{\alpha,\beta}(|\mathcal{C}_{n+1}^m(0)| > (1 - 2\varepsilon)(\theta - \varepsilon)N^{n+1} | B) > 1 - \varepsilon$, temos:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{\alpha,\beta}(|\mathcal{C}_{n+1}^m(0)| > (1 - 2\varepsilon)(\theta - 2\varepsilon)N^{n+1}) \\ & \geq \mathbb{P}_{\alpha,\beta}(|\mathcal{C}_{n+1}^m(0)| > (1 - 2\varepsilon)(\theta - 2\varepsilon)N^{n+1} | B) \mathbb{P}(B) \\ & \Rightarrow \mathbb{P}_{\alpha,\beta}(|\mathcal{C}_{n+1}^m(0)| > (1 - 2\varepsilon)(\theta - 2\varepsilon)N^{n+1}) > (1 - \varepsilon)(1 - N\varepsilon). \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned} (1 - 2\varepsilon)(\theta - 2\varepsilon) &= \theta - 2\varepsilon\theta - 2\varepsilon(1 - 2\varepsilon) \\ &> \theta - 2\varepsilon\theta - 2\varepsilon \\ &= \theta - 2\varepsilon(\theta + 1) \\ &\geq \theta - 4\varepsilon \\ &> \theta - \varepsilon_1, \end{aligned}$$

em que $\varepsilon_1 > 4\varepsilon$.

Além disso,

$$\begin{aligned}
 (1 - \varepsilon)(1 - N\varepsilon) &= 1 - N\varepsilon - \varepsilon(1 - N\varepsilon) \\
 &> 1 - N\varepsilon - \varepsilon \\
 &= 1 - \varepsilon(N + 1) \\
 &> 1 - \varepsilon_2,
 \end{aligned}$$

onde $\varepsilon_2 > \varepsilon(N + 1)$. Defina $\varepsilon' = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Então,

$$(1 - 2\varepsilon)(\theta - 2\varepsilon) > \theta - \varepsilon' \text{ e } (1 - \varepsilon)(1 - N\varepsilon) > 1 - \varepsilon'.$$

Como $\{|\mathcal{C}_{n+1}^m(0)| > (1 - 2\varepsilon)(\theta - 2\varepsilon)N^{n+1}\} \subset \{|\mathcal{C}_{n+1}^m(0)| > (\theta - \varepsilon)N^{n+1}\}$, temos que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_{\alpha,\beta}(|\mathcal{C}_{n+1}^m(0)| > (\theta - \varepsilon)N^{n+1}) &\geq \mathbb{P}_{\alpha,\beta}(|\mathcal{C}_{n+1}^m(0)| > (1 - 2\varepsilon)(\theta - 2\varepsilon)N^{n+1}) \\
 &> (1 - \varepsilon)(1 - N\varepsilon) \\
 &> 1 - \varepsilon',
 \end{aligned}$$

para n grande, concluindo a prova do Teorema 4.1.

Nos dois próximos capítulos, falaremos sobre o comportamento das funções $\theta(\alpha, \beta)$ e $\alpha_c(\beta)$.

Capítulo 5

Continuidade de θ

Teorema 5.1 *A função de percolação $\theta(\alpha, \beta)$ é contínua sempre que $\alpha > 0$.*

Primeiro mostraremos que $\theta(\alpha, \beta)$ é contínua à direita em relação a α e contínua à esquerda em relação a β .

Lema 5.0.2 *$\theta(\alpha, \beta)$ é contínua à direita em relação a $\alpha > 0$ e contínua à esquerda em relação a $\beta > 0$.*

Demonstração:

Para o caso em que $\alpha > 0$ e $\beta \in (0, N]$, $\theta(\alpha, \beta) = 1$, como foi mostrado na demonstração do Teorema 2.1(a). Logo o lema vale sempre no domínio em que $\alpha > 0$ e $\beta \leq N$. Para a prova do caso em que $\alpha > 0$ e $\beta > N$, usaremos que o limite decrescente de funções crescentes (decrescentes), que são contínuas à direita (esquerda), é contínuo à direita (esquerda).

Por acoplamento pode-se mostrar que a sequência $\mathbb{P}_{\alpha, \beta}(\mathcal{C}_i(0) \leftrightarrow \overline{\mathcal{B}_i(0)})$, vista como função de α e β , é crescente em α e decrescente em β . Visto que

$\{\mathcal{C}_i(0) \leftrightarrow \overline{\mathcal{B}_i(0)}\} \subset \{\mathcal{C}_{i-1}(0) \leftrightarrow \overline{\mathcal{B}_{i-1}(0)}\}$ para todo $i \geq 1$ e que

$$\{|\mathcal{C}(0)| = \infty\} = \bigcap_{i=0}^{\infty} \{\mathcal{C}_i(0) \leftrightarrow \overline{\mathcal{B}_i(0)}\}, \quad (5.1)$$

resta mostrar que a sequência é contínua à direita com respeito a α e à esquerda com respeito a β . Para isso, será feito o seguinte cálculo:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathcal{C}_i(0) \leftrightarrow \overline{\mathcal{B}_i(0)}) &= \sum_{k=1}^{N^i} \mathbb{P}\left(\mathcal{C}_i(0) \leftrightarrow \overline{\mathcal{B}_i(0)} \mid |\mathcal{C}_i(0)| = k\right) \mathbb{P}(|\mathcal{C}_i(0)| = k) \\ &= \sum_{k=1}^{N^i} \left[1 - \mathbb{P}\left(\mathcal{C}_i(0) \not\leftrightarrow \overline{\mathcal{B}_i(0)} \mid |\mathcal{C}_i(0)| = k\right)\right] \mathbb{P}(|\mathcal{C}_i(0)| = k) \\ &= \sum_{k=1}^{N^i} \left(1 - \prod_{j=i+1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\alpha}{\beta^j}\right\}^{(N-1)N^{j-1}k}\right) \mathbb{P}(|\mathcal{C}_i(0)| = k) \\ &= \sum_{k=1}^{N^i} \left(1 - \prod_{j=i+1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\alpha(N-1)k}{N} \left(\frac{N}{\beta}\right)^j\right\}\right) \mathbb{P}(|\mathcal{C}_i(0)| = k) \\ &= \sum_{k=1}^{N^i} \left(1 - \exp\left\{-\frac{\alpha(N-1)k}{N} \sum_{j=i+1}^{\infty} \left(\frac{N}{\beta}\right)^j\right\}\right) \mathbb{P}(|\mathcal{C}_i(0)| = k) \\ &= \sum_{k=1}^{N^i} \left(1 - \exp\left\{-\frac{\alpha(N-1)k}{\beta - N} \left(\frac{N}{\beta}\right)^i\right\}\right) \mathbb{P}(|\mathcal{C}_i(0)| = k) \quad (5.2) \\ &= \mathbb{E}\left(1 - \exp\left\{-\frac{\alpha(N-1)k}{\beta - N} \left(\frac{N}{\beta}\right)^i\right\}\right). \end{aligned}$$

Como o evento $\{|\mathcal{C}_i(0)| = k\}$ depende de um número finito de elos, a expressão (5.2) é uma soma finita de funções contínuas, portanto também $\mathbb{P}(\mathcal{C}_i(0) \leftrightarrow \overline{\mathcal{B}_i(0)})$ é contínua em $\alpha > 0$ e $\beta > N$. Além disso, $\mathbb{P}(\mathcal{C}_i(0) \leftrightarrow \overline{\mathcal{B}_i(0)}) \rightarrow 1$ quando β decresce para N , provando assim que a continuidade é válida para todo o domínio. Logo, $\theta(\alpha, \beta)$ é contínua à direita com respeito a α e à esquerda com respeito a β .

□

Para terminar a prova do teorema, falta demonstrar que $\theta(\alpha, \beta)$ é contínua à es-

querda com respeito a α e à direita com respeito a β . Para isso será usado o seguinte grafo renormalizado: as bolas de raio k serão os novos vértices de Ω_N , que serão chamados de meta-vértices. Dois meta-vértices estarão a distância l se no modelo original os vértices contidos neles estão a distância $k + l$. Meta-vértices estarão conectados se, somente se, os maiores aglomerados das bolas de raio k que representam esses meta-vértices no modelo original estão conectadas por um elo. Observe que o modelo renormalizado também é um modelo de percolação em Ω_N .

Outro modelo que será usado nesta demonstração é o de percolação mista. Este modelo é definido da seguinte maneira: cada vértice em Ω_N está aberto com probabilidade $1 - \gamma$ e o estado de cada vértice é escolhido de forma independente. Se x e y são vértices abertos, então eles estarão conectados por um elo com probabilidade $1 - \exp\left\{-\frac{\alpha}{\beta d(x,y)}\right\}$. Nesse modelo é considerada a existência ou não de um elo conectando dois vértices, diferente do modelo original em que há elos entre quaisquer dois vértices, mas eles podem estar abertos ou não. A existência ou não dos elos são independentes, condicionado ao estado dos vértices. Observe que quanto menor o valor de γ maior é a probabilidade de percolação nesse modelo. A medida desse modelo será representada por $\mathbb{P}_{\alpha,\beta,\gamma}^{mixed}$.

O próximo lema estabelece uma propriedade que será usada na demonstração deste teorema. Sua prova será feita ao final desta demonstração.

Lema 5.0.3 *Seja $\beta > N$. Para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\gamma > 0$, tal que*

$$\mathbb{P}_{\alpha,\beta}(|\mathcal{C}(0)| = \infty) \leq \mathbb{P}_{\alpha(1+\varepsilon),\beta,\gamma}^{mixed}(|\mathcal{C}(0)| = \infty).$$

O lema a seguir usa o resultado do Lema 5.0.3 e demonstra o Teorema 5.1:

Lema 5.0.4 *Se $\theta(\alpha,\beta) > 0$, então para todo $\varepsilon \in (0,\theta(\alpha,\beta))$, existe $\delta > 0$ tal que $\theta(\alpha - \delta,\beta + \delta) > \theta(\alpha,\beta) - \varepsilon$.*

Demonstração

Fixe α , $N < \beta < N^2$ (o caso $\beta \leq N$ já foi citado no Lema 5.0.2) e $\varepsilon > 0$. Foi visto na segunda observação da prova do Teorema 2.1 que para todo $\varepsilon > 0$ é possível escolher $\alpha = \alpha'$ grande suficiente tal que

$$\theta\left(\alpha', \frac{N^2 + \beta}{2}\right) > 1 - \varepsilon/3. \quad (5.3)$$

Pelo Lema 5.0.3, existe um $\gamma \in (0, \varepsilon/3)$ tal que

$$\begin{aligned} \theta\left(\alpha', \frac{N^2 + \beta}{2}\right) &\leq \mathbb{P}_{\alpha'(1+\varepsilon), \frac{N^2+\beta}{2}, \gamma}^{\text{mixed}}(|\mathcal{C}(0)| = \infty) \quad (\varepsilon = 1) \\ &= \mathbb{P}_{2\alpha', \frac{N^2+\beta}{2}, \gamma}^{\text{mixed}}(|\mathcal{C}(0)| = \infty). \end{aligned} \quad (5.4)$$

O Lema 5.0.3 não garante que $\gamma \in (0, \varepsilon/3)$, ele apenas afirma que para todo ε existirá $\gamma > 0$, mas fato é que quanto menor o valor de γ maior a probabilidade de percolação no modelo misto, então por isso podemos escolher $\gamma \in (0, \varepsilon/3)$.

Agora escolha K de forma que as duas seguintes condições sejam satisfeitas:

- (i) $\alpha [\theta(\alpha, \beta) - \varepsilon/2]^2 \left(\frac{2N^2}{\beta + N^2}\right)^K > 3\alpha'$;
- (ii) $\mathbb{P}_{\alpha, \beta}(|\mathcal{C}_K^m(0)| > [\theta(\alpha, \beta) - \frac{\varepsilon}{3}]N^K) > 1 - \frac{\gamma}{2}$.

No item (i), como $\beta < N^2 \Rightarrow 2N^2 > \beta + N^2 \Rightarrow \frac{2N^2}{\beta + N^2} > 1$, logo $\left(\frac{2N^2}{\beta + N^2}\right)^K$ fica grande quanto se queira escolhendo K grande. Já pelo Teorema 4.1, o limite da probabilidade $\mathbb{P}_{\alpha, \beta}(|\mathcal{C}_K^m(0)| > [\theta(\alpha, \beta) - \frac{\varepsilon}{3}]N^K)$ é 1 quando $K \rightarrow \infty$, logo é possível escolher K grande tal que o item (ii) também seja satisfeito.

Seja $\delta > 0$ tal que $\delta < \min\left\{\frac{\alpha}{3}, \frac{N^2 - \beta}{2}\right\}$ e

$$\mathbb{P}_{\alpha - \delta, \beta + \delta}(|\mathcal{C}_K^m(0)| > [\theta(\alpha, \beta) - \frac{\varepsilon}{3}]N^K) > 1 - \gamma. \quad (5.5)$$

A escolha de δ é possível para que a desigualdade (5.5) seja satisfeita pois, como K

é finito, o evento $\{|\mathcal{C}_K^m(0)|[\theta(\alpha, \beta) - \frac{\varepsilon}{3}]N^K\}$ depende do estado de um número finito de elos, logo a probabilidade em (5.5) é uma soma finita de funções contínuas, portando ela é contínua.

Uma bola $\mathcal{B}_K(x)$ será chamada *boa* se o tamanho do seu maior aglomerado for maior ou igual a $[\theta(\alpha, \beta) - \varepsilon/3]N^K$, ou seja, se $|\mathcal{C}_K^m(x)| \geq [\theta(\alpha, \beta) - \varepsilon/3]N^K$. Observe que K e δ foram escolhidos de forma que $\mathbb{P}_{\alpha-\delta, \beta+\delta}(\mathcal{B}_K(0) \text{ ser } \textit{boa}) > 1 - \gamma$.

Se forem desconsiderados todos os vértices que estão em bolas de raio K que não são *boas* e todos aqueles que não estão nos maiores aglomerados das bolas *boas*, os aglomerados restantes podem ser interpretados como vértices do grafo hierárquico de ordem N cujos vértices podem estar fechados com probabilidade menor ou igual a γ de maneira independente.

Lembre que no modelo renormalizado dois meta-vértices x e y , cujos vértices estão a distância $K + l$, estão conectados se seus maiores aglomerados estão conectados por pelo menos um elo. Condição aos eventos $\{|\mathcal{C}_K^m(x)| \geq [\theta(\alpha, \beta) - \varepsilon/3]N^K\}$ e $\{|\mathcal{C}_K^m(y)| \geq [\theta(\alpha, \beta) - \varepsilon/3]N^K\}$, a probabilidade dos meta-vértices x e y estarem conectados é maior ou igual a

$$\begin{aligned} & 1 - \exp \left\{ -\frac{\alpha - \delta}{(\beta + \delta)^{K+l}} \right\}^{\{[\theta(\alpha, \beta) - \varepsilon/3]N^K\}^2} \\ = & 1 - \exp \left\{ -\frac{(\alpha - \delta)[\theta(\alpha, \beta) - \varepsilon/3]^2}{(\beta + \delta)^l} \left(\frac{N^2}{\beta + \delta} \right)^K \right\}. \end{aligned}$$

Como $\delta < \frac{\alpha}{3}$ e $\delta < \frac{N^2 - \beta}{2}$, então $\alpha - \delta > \frac{2\alpha}{3}$ e $\beta + \delta < \frac{N^2 + \beta}{2}$. Então a última expressão é maior ou igual a

$$1 - \exp \left\{ -\frac{2\alpha[\theta(\alpha, \beta) - \varepsilon/3]^2}{3 \left(\frac{N^2 + \beta}{2} \right)^l} \left(\frac{2N^2}{N^2 + \beta} \right)^K \right\}.$$

Uma vez que $\alpha' < \frac{\alpha}{3} [\theta(\alpha, \beta) - \varepsilon/2]^2 \left(\frac{2N^2}{\beta + N^2} \right)^K$, temos

$$\begin{aligned} & 1 - \exp \left\{ -\frac{2\alpha[\theta(\alpha, \beta) - \varepsilon/3]^2}{3 \left(\frac{N^2 + \beta}{2} \right)^l} \left(\frac{2N^2}{N^2 + \beta} \right)^K \right\} \\ & \geq 1 - \exp \left\{ -\frac{2\alpha'}{\left(\frac{N^2 + \beta}{2} \right)^l} \right\}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Deste modo, o processo de percolação renormalizado com parâmetros $\alpha - \delta$ e $\beta + \delta$ domina estocasticamente um processo de percolação misto com parâmetros $2\alpha'$, $\frac{N^2 + \beta}{2}$ e γ . Além disso, condicionada ao evento em que a origem está no maior cluster de uma bola *boa*, a probabilidade da origem estar conectada a um aglomerado infinito é maior que $1 - \varepsilon/3$ pois:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{\alpha - \delta, \beta + \delta}(0 \leftrightarrow \infty | \{0 \in \mathcal{C}_K^m(0)\} \cap \{\mathcal{B}_K(0) \text{ é } \textit{boa}\}) \\ & \geq \mathbb{P}_{2\alpha', \frac{\beta + N^2}{2}, \gamma}^{\textit{mixed}}(|\mathcal{C}(0)| = \infty) \quad (\text{pela desigualdade (5.4)}) \\ & \geq \theta \left(\alpha', \frac{\beta + N^2}{2} \right) \\ & > 1 - \varepsilon/3. \quad (\text{por (5.3)}) \end{aligned}$$

Observe também que a probabilidade da origem pertencer ao maior aglomerado da bola $\mathcal{B}_K(0)$, dado que essa bola é *boa*, é maior ou igual a $\theta(\alpha, \beta) - \varepsilon/3$. Para provarmos isso, considere os eventos $A_j = \{j \in \mathcal{C}_K^m(0)\}$, com $j = 0, 1, \dots, N^K - 1$. Note que $|\mathcal{C}_K^m(0)| = \sum_{j=0}^{N^K-1} I(A_j)$. Condicionado ao evento que $\mathcal{B}_K(0)$ é *boa*, temos que $|\mathcal{C}_K^m(0)| \geq (\theta(\alpha, \beta) - \varepsilon/3)N^K$. Logo,

$$\mathbb{E}_{\alpha - \delta, \beta + \delta} \left(\sum_{j=0}^{N^K-1} I(A_j) \right) = \mathbb{E}_{\alpha - \delta, \beta + \delta}(|\mathcal{C}_K^m(0)|) \geq (\theta(\alpha, \beta) - \varepsilon/3)N^K.$$

O que implica,

$$\sum_{j=0}^{N^K-1} P(A_j) \geq (\theta(\alpha, \beta) - \varepsilon/3)N^K.$$

Como o grafo é invariante por translação,

$$N^K \mathbb{P}_{\alpha-\delta, \beta+\delta}(A_0) \geq (\theta(\alpha, \beta) - \varepsilon/3)N^K \Rightarrow \mathbb{P}_{\alpha-\delta, \beta+\delta}(A_0) \geq \theta(\alpha, \beta) - \varepsilon/3.$$

Usando essa última desigualdade e o fato de que $\gamma \in (0, \varepsilon/3) \Rightarrow 1 - \gamma > 1 - \varepsilon/3$ tem-se que:

$$\begin{aligned} & \theta(\alpha - \delta, \beta + \delta) \geq \\ & \geq \mathbb{P}_{\alpha-\delta, \beta+\delta}(0 \leftrightarrow \infty | \{0 \in \mathcal{C}_K^m(0)\} \cap \{\mathcal{B}_K(0) \text{ é boa}\}) \times \\ & \times \mathbb{P}_{\alpha-\delta, \beta+\delta}(0 \in \mathcal{C}_K^m(0) | \mathcal{B}_K(0) \text{ é boa}) \mathbb{P}_{\alpha-\delta, \beta+\delta}(\mathcal{B}_K(0) \text{ é boa}) \\ & > (1 - \varepsilon/3)[\theta(\alpha, \beta) - \varepsilon/3](1 - \gamma) \\ & > [\theta(\alpha, \beta) - \varepsilon/3](1 - \varepsilon/3)^2 \quad (\text{Desigualdade de Bernoulli}) \\ & > [\theta(\alpha, \beta) - \varepsilon/3](1 - 2\varepsilon/3) \\ & = \theta(\alpha, \beta) - 2\varepsilon\theta(\alpha, \beta)/3 - \varepsilon/3(1 - 2\varepsilon/3) \\ & > \theta(\alpha, \beta) - 2\varepsilon\theta(\alpha, \beta)/3 - \varepsilon/3 \\ & = \theta(\alpha, \beta) - \varepsilon/3[2\theta(\alpha, \beta)] \\ & \geq \theta(\alpha, \beta) - 3\varepsilon/3 \\ & = \theta(\alpha, \beta) - \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Demonstração do Lema 5.0.3

Para demonstração deste lema, será utilizado o modelo de percolação de longo alcance orientado, que será definido agora.

No modelo orientado misto, vértices em Ω_N estão abertos, de forma independente,

com probabilidade $1 - \gamma$. Se um vértice x está aberto, então existe um elo orientado de x para y com probabilidade $1 - \exp(-\alpha\beta^{-d(x,y)})$. Nesse caso, y não precisa estar aberto. Condicionado ao estado dos vértices, a existência ou não de elos orientados é feita de forma independente. $\hat{\mathcal{C}}(x)$ será o conjunto de vértices que estão conectados a x por um elo ou estão ligados a ele por um caminho partindo de x . Observe que a existência de um caminho partindo de x para y não implica na existência de outro caminho de y para x . A medida de probabilidade para esse modelo será representada por $\hat{\mathbb{P}}_{\alpha,\beta,\gamma}^{mixed}$. $\hat{\mathbb{P}}_{\alpha,\beta}$ é a medida do modelo de percolação de longo alcance original, isto é, não misto, no entanto com orientação. Observe que $\hat{\mathbb{P}}_{\alpha,\beta} = \hat{\mathbb{P}}_{\alpha,\beta,0}^{mixed}$.

Um resultado, cuja demonstração pode ser vista em [7] e [22] é:

$$\mathbb{P}_{\alpha,\beta,\gamma}^{mixed}(|\mathcal{C}(0)| = \infty) = \hat{\mathbb{P}}_{\alpha,\beta,\gamma}^{mixed}(|\mathcal{C}(0)| = \infty). \quad (5.7)$$

Observe que a igualdade (5.7) implica em $\mathbb{P}_{\alpha,\beta}(|\mathcal{C}(0)| = \infty) = \hat{\mathbb{P}}_{\alpha,\beta}(|\mathcal{C}(0)| = \infty)$ pois se $\gamma = 0$, então

$$\mathbb{P}_{\alpha,\beta}(|\mathcal{C}(0)| = \infty) = \mathbb{P}_{\alpha,\beta,0}^{mixed}(|\mathcal{C}(0)| = \infty) = \hat{\mathbb{P}}_{\alpha,\beta,0}^{mixed}(|\mathcal{C}(0)| = \infty) = \hat{\mathbb{P}}_{\alpha,\beta}(|\mathcal{C}(0)| = \infty).$$

O modelo de percolação misto orientado com parâmetros α , β e γ pode ser obtido como segue: associa-se variáveis aleatórias i.i.d. X_x com distribuição Poisson com parâmetro $\frac{\alpha(N-1)}{\beta-N}$ a cada vértice $x \in \Omega_N$. Constrói-se um multigrafo orientado, que é um grafo onde é permitido existir vários elos com a mesma direção conectando dois vértices. Os vértices estarão abertos independentemente dos outros com probabilidade $1 - \gamma$. Se x estiver aberto, a variável aleatória X_x indicará a quantidade de elos que partem de x . Se x estiver fechado, $X_x = 0$. Os vértices que receberão os elos que partem de x são escolhidos do conjunto $\Omega_N \setminus x$ de forma independente. Um vértice que está a distância r de x é escolhido com probabilidade $\frac{\beta-N}{(N-1)\beta^r}$. Se existir pelo menos um elo partindo de x para y , então no grafo padrão do modelo misto orientado haverá

apenas um elo de x para y . O grafo do modelo misto orientado é obtido fazendo isso para todo par (x,y) , onde $x,y \in \Omega_N$. De fato, condicionado ao evento em que x está aberto,

$$\begin{aligned}
 P(x \leftrightarrow y) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(x \leftrightarrow y \mid X_x = k)P(X_x = k) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} [1 - P(x \nleftrightarrow y \mid X_x = k)]P(X_x = k) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ 1 - \left[1 - \frac{\beta - N}{(N-1)\beta^d} \right]^k \right\} \frac{\exp \left\{ -\frac{\alpha(N-1)}{\beta-N} \right\} \left[\frac{\alpha(N-1)}{\beta-N} \right]^k}{k!} \\
 &= \exp \left\{ -\frac{\alpha(N-1)}{\beta-N} \right\} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left\{ 1 - \left[1 - \frac{\beta-N}{(N-1)\beta^d} \right]^k \right\} \left[\frac{\alpha(N-1)}{\beta-N} \right]^k}{k!} \\
 &= \exp \left\{ -\frac{\alpha(N-1)}{\beta-N} \right\} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{\alpha(N-1)}{\beta-N} \right]^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{\alpha(N-1)}{\beta-N} - \frac{\alpha}{\beta^d} \right]^k}{k!} \right\} \\
 &= \exp \left\{ -\frac{\alpha(N-1)}{\beta-N} \right\} \left[\exp \left\{ \frac{\alpha(N-1)}{\beta-N} \right\} - \exp \left\{ \frac{\alpha(N-1)}{\beta-N} - \frac{\alpha}{\beta^d} \right\} \right] \\
 &= 1 - \exp \left\{ -\frac{\alpha}{\beta^d} \right\},
 \end{aligned}$$

em que $d = d(x,y)$.

Considere as seguintes variáveis aleatórias:

- $Z_1 \sim \text{Poisson} \left(\frac{\alpha(N-1)}{\beta-N} \right)$;
- $Y_1 \sim \text{Bernoulli}(1 - \gamma)$;
- $Y_2 \sim \text{Poisson} \left(\frac{\alpha(N-1)(1+\varepsilon)}{\beta-N} \right)$, independente de Y_1 ;
- $Z_2 = Y_1 Y_2$.

No modelo de percolação não misto orientado, o número de elos que partem de um vértice x tem distribuição igual a de Z_1 . Já no modelo misto orientado, a quantidade

de elos que partem de x tem distribuição igual a de Z_2 . Para terminar a prova do lema, falta mostrar que $\mathbb{P}(Z_2 > k) > \mathbb{P}(Z_1 > k)$ para todo $k \in \mathbb{R}$.

Em primeiro lugar, veja que para todo $\varepsilon > 0$, podemos escolher $\gamma > 0$ tal que $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = \mathbb{P}(Z_2 = 0)$. Isso é possível pois

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_2 = 0) &= \mathbb{P}(Z_2 = 0|Y_1 = 0)\mathbb{P}(Y_1 = 0) + \mathbb{P}(Z_2 = 0|Y_1 = 1)\mathbb{P}(Y_1 = 1) \\ &= \mathbb{P}(Z_2 = 0|Y_1 = 0)\mathbb{P}(Y_1 = 0) + \mathbb{P}(Y_2 = 0|Y_1 = 1)\mathbb{P}(Y_1 = 1) \\ &= \gamma + e^{-\frac{\alpha(N-1)(1+\varepsilon)}{\beta-N}}(1-\gamma) \\ &= \gamma \left(1 - e^{-\frac{\alpha(N-1)(1+\varepsilon)}{\beta-N}} \right) + e^{-\frac{\alpha(N-1)(1+\varepsilon)}{\beta-N}}. \end{aligned}$$

Como $\mathbb{P}(Z_1 = 0) = e^{-\frac{\alpha(N-1)}{\beta-N}}$, temos

$$\begin{aligned} e^{-\frac{\alpha(N-1)}{\beta-N}} &= \gamma \left(1 - e^{-\frac{\alpha(N-1)(1+\varepsilon)}{\beta-N}} \right) + e^{-\frac{\alpha(N-1)(1+\varepsilon)}{\beta-N}} \\ \Rightarrow \gamma &= \frac{e^{-\frac{\alpha(N-1)}{\beta-N}} - e^{-\frac{\alpha(N-1)(1+\varepsilon)}{\beta-N}}}{1 - e^{-\frac{\alpha(N-1)(1+\varepsilon)}{\beta-N}}}. \end{aligned}$$

Então, para esse valor de γ e para todo $k > 0$, tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_2 > k|Z_2 > 0) &= \mathbb{P}(Y_1 Y_2 > k|Y_1 > 0, Y_2 > 0) \quad (Y_1 > 0 \Rightarrow Y_1 = 1) \\ &= \mathbb{P}(Y_2 > k|Y_1 > 0, Y_2 > 0) \quad (Y_1 \text{ e } Y_2 \text{ são indep.}) \\ &= \mathbb{P}(Y_2 > k|Y_2 > 0) \end{aligned} \tag{5.8}$$

Como foi visto no Apêndice C, $\mathbb{P}(Y_2 > k|Y_2 > 0) > \mathbb{P}(Z_1 > k|Z_1 > 0)$.

Logo, $\mathbb{P}(Z_2 > k) = \mathbb{P}(Z_2 > k, Z_2 > 0) = \mathbb{P}(Z_2 > k|Z_2 > 0)P(Z_2 > 0)$. Como para esse γ $P(Z_1 = 0) = \mathbb{P}(Z_2 = 0)$, então $\mathbb{P}(Z_2 > k) = \mathbb{P}(Z_2 > k|Z_2 > 0)P(Z_1 > 0)$. Pela desigualdade (5.8), $\mathbb{P}(Z_2 > k) > \mathbb{P}(Z_1 > k|Z_1 > 0)P(Z_1 > 0) = \mathbb{P}(Z_1 > k)$. Isso

mostra que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\gamma > 0$ tal que

$$\mathbb{P}(Z_2 > k) > \mathbb{P}(Z_1 > k) \text{ para todo } k \in \mathbb{R}. \quad (5.9)$$

A desigualdade $\mathbb{P}(Z_2 > k) > \mathbb{P}(Z_1 > k)$ implica que $\hat{\mathbb{P}}_{\alpha(1+\varepsilon),\beta,\gamma}^{mixed}(x \leftrightarrow y) > \hat{\mathbb{P}}_{\alpha,\beta}(x \leftrightarrow y)$. Pela equação (5.7), $\mathbb{P}_{\alpha,\beta,\gamma}^{mixed}(|\mathcal{C}(0)| = \infty) = \hat{\mathbb{P}}_{\alpha,\beta,\gamma}^{mixed}(|\mathcal{C}(0)| = \infty)$ e como $\mathbb{P}_{\alpha,\beta}(|\mathcal{C}(0)| = \infty) = \hat{\mathbb{P}}_{\alpha,\beta}(|\mathcal{C}(0)| = \infty)$. Então:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\alpha(1+\varepsilon),\beta,\gamma}^{mixed}(|\mathcal{C}(0)| = \infty) &= \hat{\mathbb{P}}_{\alpha(1+\varepsilon),\beta,\gamma}^{mixed}(|\mathcal{C}(0)| = \infty) \\ &> \hat{\mathbb{P}}_{\alpha,\beta}(|\mathcal{C}(0)| = \infty) \\ &= \mathbb{P}_{\alpha,\beta}(|\mathcal{C}(0)| = \infty) \end{aligned}$$

□

Capítulo 6

Continuidade de $\alpha_c(\beta)$

Com a demonstração do Teorema 5.1, vimos que a função $\theta(\alpha, \beta)$ é contínua quando $\alpha > 0$ e, por acoplamento, foi provado também que ela é crescente com respeito a α e decrescente com respeito a β . No próximo teorema veremos o comportamento da função $\alpha_c(\beta) := \inf\{\alpha \geq 0 : \theta(\alpha, \beta) > 0\}$.

Teorema 6.1 *O valor crítico $\alpha_c(\beta)$ é contínuo para $\beta \in (0, N^2)$ e estritamente crescente para $\beta \in [N, N^2)$. Finalmente $\alpha_c(\beta) \nearrow \infty$ para $\beta \nearrow N^2$.*

Esse teorema será demonstrado em três partes. A primeira parte é sobre o Lema 6.0.5 que mostrará dois resultados. O primeiro é que $\alpha_c(\beta)$ é estritamente crescente quando $\beta \in (N, N^2)$, uma vez que, pelo Teorema 2.1, $\alpha_c(N) = 0$. O segundo mostra que $\alpha_c(\beta)$ é contínua à direita quando $\beta \in (0, N^2)$.

A segunda parte da demonstração mostrará que $\alpha_c(\beta)$ é contínua à esquerda quando $\beta \in (0, N^2)$. Esse resultado está no Lema 6.0.6 cuja prova precisa dos resultados do Lema 6.0.7 e da igualdade

$$\alpha_c(\beta) := \inf\{\alpha \geq 0 : \theta(\alpha, \beta) > 0\} = \sup\{\alpha \geq 0 : \mathbb{E}_{\alpha, \beta}(|\mathcal{C}(0)|) < \infty\}, \quad (6.1)$$

que é válida para modelos de percolação de longo alcance em \mathbb{Z}^d e cuja demonstração pode ser vista em [1]. Para terminar a demonstração do Teorema 6.1, na terceira parte será provado que $\alpha_c(\beta) \nearrow \infty$ quando $\beta \nearrow N^2$.

Primeira parte

Lema 6.0.5 $\alpha_c(\beta)$ é estritamente crescente em $\beta \in (N, N^2)$ e contínua à direita em $\beta \in (0, N^2)$.

Demonstração do Lema 6.0.5:

Primeiro será demonstrado que $\alpha_c(\beta)$ é estritamente crescente quando $\beta \in (N, N^2)$.

Quando $\beta \in (N, N^2)$, pelo Teorema 2.1, $\alpha_c(\beta) > 0$. Lembre também que, pelo Teorema 5.1, a função $\theta(\alpha, \beta)$ é contínua quando $\alpha > 0$. Portanto, $\theta(\alpha_c(\beta), \beta) = 0$ se $\beta \in (N, N^2)$.

Como $1 - \exp\left\{-\frac{(1+\varepsilon)\alpha}{(1+\varepsilon)^k \beta^k}\right\} = 1 - \exp\left\{-\frac{\alpha}{(1+\varepsilon)^{k-1} \beta^k}\right\} \leq 1 - \exp\left\{-\frac{\alpha}{\beta^k}\right\}$, para todo $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}_{\alpha, \beta}$ domina estocasticamente $\mathbb{P}_{\alpha(1+\varepsilon), \beta(1+\varepsilon)}$. Logo,

$$0 = \theta(\alpha_c(\beta), \beta) \geq \theta(\alpha_c(\beta)(1+\varepsilon), \beta(1+\varepsilon)) \Rightarrow \theta(\alpha_c(\beta)(1+\varepsilon), \beta(1+\varepsilon)) = 0.$$

Uma vez que $\alpha_c(\beta(1+\varepsilon)) = \inf\{\alpha \geq 0 : \theta(\alpha, \beta(1+\varepsilon)) > 0\}$, então $\alpha_c(\beta(1+\varepsilon)) \geq \alpha_c(\beta)(1+\varepsilon)$. Como $\alpha_c(\beta) > 0$ para $\beta \in (N, N^2)$ (Teorema 2.1), isso implica que $\alpha_c(\beta(1+\varepsilon)) > \alpha_c(\beta)$. Então fica provado que $\alpha_c(\beta)$ é estritamente crescente quando $\beta \in (N, N^2)$.

Agora falta provar que $\alpha_c(\beta)$ é contínua à direita quando $\beta \in (0, N^2)$.

Observe que, por definição de $\alpha_c(\beta)$, para todo $\delta > 0$, $\theta(\alpha_c(\beta) + \delta, \beta)$ é estritamente positivo. Como $\theta(\alpha, \beta)$ é contínua para $\alpha > 0$, existirá $\varepsilon > 0$ tal que $\theta(\alpha_c(\beta) + \delta, \beta + \varepsilon) > 0$. Isso implica que $\alpha_c(\beta + \varepsilon) < \alpha_c(\beta) + \delta$ e, pela primeira parte da demonstração deste lema, $\alpha_c(\beta + \varepsilon) > \alpha_c(\beta)$. Então, para todo $\delta > 0$, existe

$\varepsilon > 0$ tal que $0 < \alpha_c(\beta + \varepsilon) - \alpha_c(\beta) < \varepsilon$. Provando que $\alpha_c(\beta)$ é contínua à direita quando $\beta \in (0, N^2)$.

□

Segunda parte

O Lema 6.0.6 garante a continuidade à esquerda de $\alpha_c(\beta)$. Como já foi dito anteriormente, para a sua demonstração será utilizado o Lema 6.0.7 cuja demonstração é feita depois da prova do Lema 6.0.6. Também será utilizada a igualdade em (6.1).

Lema 6.0.6 $\alpha_c(\beta)$ é contínua à esquerda para $\beta \in (0, N^2)$.

Lema 6.0.7 Sejam $\alpha > 0$ e $\beta > N$. Se $\mathbb{E}_{\alpha, \beta}(|\mathcal{C}(0)|) < \infty$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathbb{E}_{\alpha, \beta(1-\varepsilon)}(|\mathcal{C}(0)|) < \infty$.

Demonstração do Lema 6.0.6

Pelo Lema 6.0.5, $\alpha_c(\beta)$ é estritamente crescente se $\beta \in (N, N^2)$, logo $\alpha_c(\beta(1-\varepsilon)) < \alpha_c(\beta)$ para todo $\varepsilon > 0$ o que implica $\mathbb{P}_{\alpha_c(\beta), \beta(1-\varepsilon)}(|\mathcal{C}(0)| = \infty) > 0$.

Pela igualdade em (6.1), $\alpha_c(\beta(1-\varepsilon)) = \sup\{\alpha \geq 0 : \mathbb{E}_{\alpha, \beta(1-\varepsilon)}(|\mathcal{C}(0)|) < \infty\}$, logo

$$\mathbb{E}_{\alpha_c(\beta), \beta(1-\varepsilon)}(|\mathcal{C}(0)|) = \infty.$$

Pela negativa do Lema 6.0.7, tem-se que $\mathbb{E}_{\alpha_c(\beta), \beta}(|\mathcal{C}(0)|) = \infty$. Além disso, para todo $\delta > 0$, $\mathbb{E}_{\alpha_c(\beta) - \delta, \beta}(|\mathcal{C}(0)|) < \infty$ por (6.1). Logo, pelo Lema 6.0.7, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathbb{E}_{\alpha_c(\beta) - \delta, \beta(1-\varepsilon)}(|\mathcal{C}(0)|) < \infty$. Isso implica que para todo $\delta > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha_c(\beta(1-\varepsilon)) > \alpha_c(\beta) - \delta$, por (6.1).

Como $\alpha_c(\beta)$ é estritamente crescente, $\alpha_c(\beta(1-\varepsilon)) < \alpha_c(\beta)$. Portanto, para todo $\delta > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $0 < \alpha_c(\beta) - \alpha_c(\beta(1-\varepsilon)) < \delta$, provando que $\alpha_c(\beta)$ é contínua à esquerda.

□

Demonstração do Lema 6.0.7

Na demonstração desse lema será utilizada a técnica de acoplamento padrão para o modelo de percolação de longo alcance para diferentes valores de α e β . Para cada par de vértices (x,y) , em que $x, y \in \Omega_N$, associamos uma variável aleatória $U(x,y)$ com distribuição uniforme $(0,1)$ de maneira independente. Quando os parâmetros forem α e β , os vértices x e y estarão conectados se $U(x,y) < 1 - \exp\{\alpha\beta^{-d(x,y)}\}$. $\mathcal{C}(x; \alpha, \beta)$ será a notação utilizada para representar o aglomerado de x quando os parâmetros são α e β .

Seja $a \geq \mathbb{E}_{\alpha, \beta}(|\mathcal{C}(0)|)$, que é finita por hipótese. Seja $\varepsilon > 0$ pequeno (depois será mostrado o quanto ε deverá ser pequeno). Defina $\mathcal{A}_0(0) = \mathcal{C}(0; \alpha, \beta)$ e, para $i = 0, 1, \dots$, $\mathcal{A}_{i+1}(0) = [\cup_{x \in \mathcal{A}'_{i+1}(0)} \mathcal{C}(x; \alpha, \beta)] \setminus \cup_{j=0}^i \mathcal{A}_j(0)$. $\mathcal{A}'_{i+1}(0)$ é o conjunto de vértices que não estão em $\cup_{j=0}^i \mathcal{A}_j$, mas que se conectam a $\mathcal{A}_i(0)$ através de um elo considerando os parâmetros α e $\beta(1 - \varepsilon)$.

A Figura 6.1 mostra uma possível configuração $\omega \in \Omega$. Os elos cheios são aqueles que estão abertos quando os parâmetros são α e β . Os elos tracejados representam os elos que são adicionados se os parâmetros forem α e $\beta(1 - \varepsilon)$.

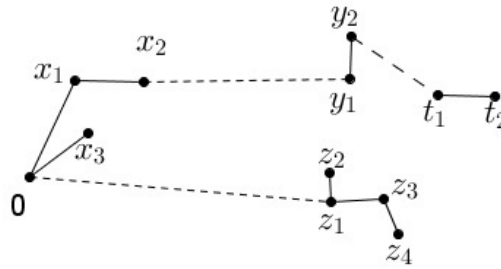


Figura 6.1: Comparando o aglomerado da origem para diferentes parâmetros.

No exemplo de configuração mostrado na figura anterior, $\mathcal{A}_0(0) = \{0, x_1, x_2, x_3\}$, $\mathcal{A}'_1(0) = \{y_1, z_1\}$, $\mathcal{A}_1(0) = \{y_1, y_2, z_1, z_2, z_3, z_4\}$, $\mathcal{A}'_2(0) = \{t_1\}$ e $\mathcal{A}_2(0) = \{t_1, t_2\}$.

Por definição, $\mathcal{A}'_i(0) \subset \mathcal{A}_i(0)$ para todo $i \geq 1$ e temos também que $\mathcal{C}(0; \alpha, \beta(1 - \varepsilon)) = \cup_{i=0}^{\infty} \mathcal{A}_i(0)$. Como o objetivo dessa demonstração é provar que

$\mathbb{E}_{\alpha, \beta(1-\varepsilon)}(|\mathcal{C}(0)|) < \infty$, é interessante encontrar uma cota superior para $\mathbb{E}(\mathcal{A}_i(0))$ para todo $i \geq 1$.

Seja $x \in \mathcal{A}_i(0)$. Se $y \in \Omega_N \setminus \cup_{j=0}^i \mathcal{A}_j$, então $U(x, y) > 1 - \exp\{-\alpha\beta^{-d(x,y)}\}$. Agora considere o conjunto:

$$\left\{ y \in \Omega_N \setminus \cup_{j=0}^i \mathcal{A}_j(0); U(x, y) < 1 - \exp\left\{-\alpha[\beta(1-\varepsilon)]^{-d(x,y)}\right\} \right\}. \quad (6.2)$$

Esse conjunto representa todos os vértices $y \in \Omega_N$ que não pertencem ao aglomerado $\mathcal{C}(x; \alpha, \beta)$, mas que estão no aglomerado de x quando os parâmetros do modelo são α e $\beta(1-\varepsilon)$, isto é, $y \in \mathcal{C}(x; \alpha, \beta(1-\varepsilon))$. Uma vez que o grafo é transitivo, o valor esperado para o tamanho do conjunto (6.2) é limitado superiormente por:

$$\begin{aligned} b &:= \sum_{y \in \Omega_N} \mathbb{P}\left(U(0, y) < 1 - \exp\left\{-\alpha[\beta(1-\varepsilon)]^{-d(x,y)}\right\} \mid U(x, y) > 1 - \exp\left\{-\alpha\beta^{-d(x,y)}\right\}\right) \\ &= \sum_{y \in \Omega_N} \frac{\mathbb{P}\left(1 - \exp\left\{-\alpha\beta^{-d(x,y)}\right\} < U(0, y) < 1 - \exp\left\{-\alpha[\beta(1-\varepsilon)]^{-d(x,y)}\right\}\right)}{\mathbb{P}\left(U(x, y) > 1 - \exp\left\{-\alpha\beta^{-d(x,y)}\right\}\right)} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (N-1)N^{i-1} \frac{\exp\left\{-\alpha\beta^{-d(x,y)}\right\} - \exp\left\{-\alpha[\beta(1-\varepsilon)]^{-d(x,y)}\right\}}{\exp\left\{-\alpha\beta^{-d(x,y)}\right\}} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (N-1)N^{i-1} \left[1 - \exp\left\{-\frac{\alpha}{\beta^i(1-\varepsilon)^i} + \frac{\alpha}{\beta^i}\right\}\right] \quad (\text{Como } 1 - e^{-x} \leq x) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} (N-1)N^{i-1} \left[\frac{\alpha}{\beta^i(1-\varepsilon)^i} - \frac{\alpha}{\beta^i}\right] \\ &= \frac{(N-1)\alpha}{N} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{N}{\beta(1-\varepsilon)}\right]^i - \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{N}{\beta}\right)^i \right\} \\ &= \frac{(N-1)\alpha}{N} \left[\frac{N}{\beta(1-\varepsilon)} \frac{\beta(1-\varepsilon)}{\beta(1-\varepsilon) - N} - \frac{N}{\beta} \frac{\beta}{\beta - N} \right] \\ &= \frac{(N-1)\alpha\beta\varepsilon}{[\beta(1-\varepsilon) - N](\beta - N)}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Como a expressão (6.3) vai para 0 quando $\varepsilon \searrow 0$, então é possível escolher $\varepsilon > 0$

pequeno o suficiente tal que $b < a^{-1}$, onde $a = \mathbb{E}(|\mathcal{A}_0(0)|)$. Uma vez que

$$\cup_{x \in \mathcal{A}_i(0)} \left\{ y \in \Omega_N \setminus \cup_{j=0}^i \mathcal{A}_j(0); U(x, y) < 1 - \exp \left\{ -\alpha [\beta(1 - \varepsilon)]^{-d(x, y)} \right\} \right\} = \mathcal{A}'_{i+1},$$

para todo $i \geq 0$, a esperança $\mathbb{E}(|\mathcal{A}'_{i+1}(0)|) \leq b\mathbb{E}(|\mathcal{A}_i(0)|)$. Pela transitividade do grafo, $a = \mathbb{E}(|\mathcal{C}(0; \alpha, \beta)|) = \mathbb{E}(|\mathcal{C}(x; \alpha, \beta)|)$. Uma vez que

$$\mathcal{A}_{i+1}(0) = [\cup_{x \in \mathcal{A}'_{i+1}(0)} \mathcal{C}(x; \alpha, \beta)] \setminus \cup_{j=0}^i \mathcal{A}_j(0),$$

a esperança $\mathbb{E}(|\mathcal{A}_{i+1}(0)|) \leq a\mathbb{E}(|\mathcal{A}'_{i+1}(0)|)$ para todo $i \geq 0$. Isso implica que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|\mathcal{A}_i(0)|) &\leq a\mathbb{E}(|\mathcal{A}'_i(0)|) \\ &\leq ab\mathbb{E}(|\mathcal{A}_{i-1}(0)|) \\ &\leq a^2b\mathbb{E}(|\mathcal{A}'_{i-1}(0)|) \\ &\leq (ab)^2\mathbb{E}(|\mathcal{A}_{i-2}(0)|) \\ &\leq \dots \leq \\ &\leq (ab)^i\mathbb{E}(|\mathcal{A}_0(0)|) = a(ab)^i. \end{aligned}$$

Lembrando que $\mathcal{C}(0; \alpha, \beta(1 - \varepsilon)) = \cup_{i=0}^{\infty} \mathcal{A}_i(0)$ e que $b < a^{-1}$, temos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|\mathcal{C}(0; \alpha, \beta(1 - \varepsilon))|) &\leq \sum_{i=0}^{\infty} a(ab)^i \\ &= \frac{a}{1 - ab} < \infty. \end{aligned}$$

Isso mostra que se $\mathbb{E}_{\alpha, \beta}(|\mathcal{C}(0)|) < \infty$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathbb{E}_{\alpha, \beta(1 - \varepsilon)}(|\mathcal{C}(0)|) < \infty$.

□

Terceira parte

Para concluir a demonstração do Teorema 6.1 falta provar que $\alpha_c(\beta) \nearrow \infty$ quando $\beta \nearrow N^2$.

Suponha por absurdo que $\lim_{\beta \rightarrow N^2-} \alpha_c(\beta) = \alpha' < \infty$. Porém, como $\alpha_c(N^2) = \infty$, pela igualdade em (6.1), $\mathbb{E}_{\alpha, N^2}(|\mathcal{C}(0)|) < \infty$ para todo $\alpha \geq 0$. Portanto, $\mathbb{E}_{\alpha'', N^2}(|\mathcal{C}(0)|) < \infty$, onde $\alpha'' > \alpha'$. Pelo Lema 6.0.7, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\mathbb{E}_{\alpha'', N^2(1-\varepsilon)}(|\mathcal{C}(0)|) < \infty.$$

Chega-se ao absurdo pois se $\alpha'' > \alpha' \geq \alpha_c(N^2(1-\varepsilon))$, por (6.1),

$$\mathbb{E}_{\alpha'', N^2(1-\varepsilon)}(|\mathcal{C}(0)|) = \infty.$$

Logo $\lim_{\beta \rightarrow N^2-} \alpha_c(\beta) = \infty$.

□

Apêndice A

Teoria Ergódica - Conceitos Básicos

Nesse apêndice será feito um levantamento de conceitos de Teoria Ergódica e seus resultados, cujas demonstrações podem ser encontradas em [12], [24] e [28]. Esse resultados serão utilizados principalmente na demonstração da unicidade do aglomerado aberto infinito no modelo de percolação de longo alcance no grafo hierárquico. Vamos denotar por Ω o espaço amostral e \mathcal{A} a σ -álgebra de Ω .

O primeiro teorema diz respeito a unicidade da medida de Lebesgue.

Teorema A.1 *Seja $\mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$ a σ -álgebra dos borelianos em \mathbb{R}^n . Existe uma única medida $l : \mathbb{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ tal que, se $A = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$, então $\lambda(A) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$. Esta medida é chamada medida de Lebesgue.*

O próximo resultado é utilizado nesse trabalho para construir as σ -álgebras e as medidas de probabilidade dos modelos em \mathbb{Z}^d e de percolação de longo alcance.

Teorema A.2 *(Teorema de Extensão de Hahn-Kolmogorov). Seja \mathcal{A}_0 uma semi-álgebra de subconjuntos de Ω e \mathcal{A} a σ -álgebra gerada por \mathcal{A}_0 . Seja $\mu_0 : \mathcal{A}_0 \rightarrow [0, 1]$ uma medida. Então existe uma única medida $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ que estende μ_0 .*

Agora introduziremos a definição de medida invariante por uma transformação $T : \Omega \rightarrow \Omega$. Um dos resultados relacionados a essa definição é o Lema [A.0.8](#). Ele

garante que se uma medida definida em uma semi-álgebra é invariante por T , então a medida que a estende na σ -álgebra também é invariante por T .

Definição A.0.1 *Uma medida μ diz-se invariante pela transformação T se $\mu(E) = \mu(T^{-1}(E))$ para todo conjunto mensurável $E \subset \Omega$.*

Lema A.0.8 *Seja $T : \Omega \rightarrow \Omega$ uma transformação mensurável e μ uma medida finita em Ω . Suponha que existe uma semi-álgebra geradora \mathcal{A} da σ -álgebra de Ω tal que $\mu(E) = \mu(T^{-1}(E))$ para todo $E \in \mathcal{A}$. Então o mesmo vale para todo conjunto mensurável E , isto é, a medida μ é invariante por T .*

Finalmente, vamos definir o conceito de ergodicidade e seus principais resultados.

Definição A.0.2 *Um conjunto $A \subset \Omega$ é invariante com respeito a uma transformação T se $T^{-1}(A) = A$.*

Definição A.0.3 *Uma medida μ invariante por T é ergódica se todo conjunto invariante A tem medida 0 ou 1.*

Teorema A.3 *(Teorema de Birkhoff-Khinchin). Seja T uma transformação que preserva medida e $\xi = \xi(\omega)$ uma variável aleatória com $\mathbb{E}(\xi) < \infty$. Então, \mathbb{P} -q.c.,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \xi(T^k(\omega)) = \mathbb{E}(\xi | \mathcal{A}).$$

Se a medida é ergódica com respeito a T , então \mathbb{P} -q.c.,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \xi(T^k(\omega)) = \mathbb{E}(\xi).$$

Agora considere duas medidas de probabilidade μ_1 e μ_2 invariantes com respeito à transformação T . A medida de probabilidade $\mu_1 + t(\mu_2 - \mu_1)$ ainda é invariante. Vamos denotar por \mathcal{M} a coleção das medidas de probabilidade invariantes com respeito

à T , pela observação acima, \mathcal{M} é um conjunto convexo. Com isso, vamos definir os pontos extremais de \mathcal{M} e o Lema A.0.9 vai garantir que uma medida invariante é ergódica se, somente se, ela é um ponto extremal de \mathcal{M} . Essa relação será utilizada na demonstração do teorema que garante a unicidade do aglomerado aberto infinito no modelo de percolação de longo alcance.

Definição A.0.4 *Seja \mathcal{M} um conjunto convexo. Um ponto $p \in \mathcal{M}$ é dito extremal, se para quaisquer $x, y \in \mathcal{M}$ e $t \in [0,1]$, $x + t(y - x) = p$ implica que $t = 0$ ou 1 .*

Lema A.0.9 *Uma medida de probabilidade invariante μ é ergódica se, somente se, não é possível escrevê-la da forma $\mu = c_1\mu_1 + c_2\mu_2$, em que $c_1, c_2 \in [0,1]$ e μ_1, μ_2 são medidas de probabilidade invariantes em que $\mu_1 \neq \mu_2$.*

Apêndice B

Processo de Ramificação

Aqui será feita uma apresentação resumida sobre o processo de ramificação já que um de seus resultados ajudará na demonstração de um dos teoremas provado por Koval, Meester e Trapman [18]. O processo de ramificação é um processo estocástico de crescimento populacional e nosso objetivo principal é mostrar em quais condições uma população eventualmente se extingue.

Denote por X_0 a quantidade inicial de indivíduos em uma população. Cada indivíduo, de maneira independente, reproduz k novos indivíduos com probabilidade p_k , em que

$$p_k \geq 0, \text{ para todo } k = 0, 1, 2, \dots, \text{ e } \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1. \quad (\text{B.1})$$

A quantidade total de indivíduos descendentes da população inicial, também chamada de primeira geração, será denotada por X_1 . Novamente, cada indivíduo da primeira geração reproduz k descendentes com probabilidade p_k , conforme as regras em (B.1). Assim, a primeira geração produz uma segunda geração cuja quantidade de indivíduos será denotada por X_2 .

De maneira geral, na $(n - 1)$ -ésima geração, cada indivíduo reproduz k descenden-

tes com probabilidade p_k , de acordo com (B.1), de forma independente. Esses novos indivíduos compõem a n -ésima geração cujo tamanho é denotado por X_n .

Dizemos que a sequência de variáveis aleatórias $\{X_n\}_{n \geq 0}$ gera uma cadeia de Markov, isto é,

$$P(X_n = x_n \mid X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) = P(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}).$$

Agora vamos assumir que a população inicial é composta por apenas um indivíduo, $X_0 = 1$. Seja Y_i o número de descendentes gerados pelo indivíduo i de uma determinada geração. Temos que $(Y_i)_{i \geq 1}$ são variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição

$$P(Y_i = k) = p_k, \text{ para todo } k = 0, 1, 2, \dots, \text{ e } \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

Para todo $n = 0, 1, 2, \dots$, podemos escrever $X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} P(Y_n = k)$.

A função $\varphi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$ é chamada função geradora de Y_i , para todo i , e $\varphi_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_n = k) s^k$ é a função geradora de X_n , para $n = 0, 1, 2, \dots$. Assumiremos que $\varphi_0(s) = s$ e que $\varphi_n(0) = P(X_n = 0)$. Como $X_0 = 1$, $\varphi_1(s) = \varphi(s)$. Além disso, temos que

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1}(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{n+1} = k) s^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ s^k \left[\sum_{j=0}^{\infty} P(X_{n+1} = k \mid X_n = j) P(X_n = j) \right] \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} P(X_{n+1} = k \mid X_n = j) s^k P(X_n = j) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ P(X_n = j) \left[\sum_{k=0}^{\infty} P(Y_1 + \dots + Y_j = k) s^k \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Como as variáveis aleatórias Y_i são i.i.d. com função geradora $\varphi(s)$, a soma $Y_1 + \dots + Y_j$ tem função geradora $[\varphi(s)]^j$. Portanto, a expressão em (B.2) é igual a

$$\begin{aligned}
 \varphi_{n+1}(s) &= \varphi_n(\varphi(s)) \\
 &= \varphi_{n-1}(\varphi(\varphi(s))) = \varphi_{n-1}(\varphi_2(s)) \\
 &= \dots = \varphi_1(\varphi_n(s)) \\
 &= \varphi(\varphi_n(s)). \tag{B.3}
 \end{aligned}$$

Voltando ao nosso objetivo principal que é saber a probabilidade de extinção da população, vamos definir o evento $\{\text{Extinção}\} = \cup_{n=1}^{\infty} \{X_n = 0\}$. Queremos calcular $P(\{\text{Extinção}\}) := \pi$. Observe que se $p_0 = 0$, isto é, a probabilidade de um indivíduo não produzir descendentes é 0, então a população não se extingue com probabilidade 1, ou seja, $\pi = 0$. Por outro lado, se $p_0 = 1$, o indivíduo não reproduz com probabilidade 1, como consequência a população se extingue com probabilidade 1 ($\pi = 1$). Então vamos considerar que $0 < p_0 < 1$. O próximo resultado relaciona a média de descendentes do primeiro indivíduo da população e o valor da probabilidade π .

Teorema B.1 *Se $m := E(X_1) \leq 1$, então $\pi = 1$. Se $m > 1$, então $\pi < 1$ e é a única solução não negativa da equação $s = \varphi(s)$, que é estritamente menor do que 1.*

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [25].

Apêndice C

Desigualdades Importantes

Ao longo do texto utilizamos algumas desigualdades para demonstração de propriedades e teoremas. Nesse apêndice, estão reunidas todas as desigualdades que usaremos.

C.1 Comparação entre Bernoulli's

Sejam $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ e $Y_i \sim \text{Bernoulli}(p + \varepsilon_i)$, onde $i = 1, 2, \dots, n$ e $\varepsilon_i > 0$ para todo i . Vamos mostrar que $P(\sum_{i=1}^n Y_i \geq k) \geq P(\sum_{i=1}^n X_i \geq k)$ para todo $k \geq 0$.

Defina variáveis aleatórias independentes $U_i \sim \text{Uniforme}[0,1]$, para $i = 1, 2, \dots, n$, e considere uma sequência de n realizações independentes de um experimento cujo resultado consiste em sucesso ou fracasso. Dizemos que a j -ésima realização é p -sucesso se $U_j \leq p$, para $j = 1, \dots, n$. Note que

$$P(X_j = 1) = \lambda(U_j \leq p) \leq \lambda(U_j \leq p + \varepsilon_j) = P(Y_j = 1),$$

em que λ é a medida de Lebesgue em $[0,1]$.

Vamos denotar por $p' := \min_j(p + \varepsilon_j)$ e considere o conjunto

$$N_p = \{j \in \{1, \dots, n : U_j \leq p\}\}.$$

Seja λ' é a medida produto de n uniformes no intervalo $[0,1]$. Nesse caso,

$$P\left(\sum_{j=1}^n X_j \geq k\right) = \lambda'(|N|_p \geq k) \leq \lambda'(|N|_{p'} \geq k) = P\left(\sum_{j=1}^n Y_j \geq k\right).$$

Como queríamos provar. □

C.2 Comparação entre Poisson's

Seja $X_1 \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$ e $X_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$, onde $\lambda_1 > \lambda_2$. Queremos provar que $P(X_1 > k | X_1 > 0) \geq P(X_2 > k | X_2 > 0)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Note que se $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, então $P(X > k | X > 0) > 0$ para todo k . Então, para k fixo, basta provar que a derivada de $P(X > k | X > 0) > 0$ com respeito a λ é estritamente positiva para validarmos a desigualdade acima.

Primeiramente, temos que

$$P(X > k | X > 0) = \frac{P(X > k)}{P(X > 0)} = \frac{e^{-\lambda} \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!}}{1 - e^{-\lambda}} = \frac{\sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!}}{e^{\lambda} - 1}.$$

Logo,

$$\frac{dP(X > k | X > 0)}{d\lambda} = \frac{\sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{j\lambda^{j-1}}{j!} (e^{\lambda} - 1) - \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} e^{\lambda}}{(e^{\lambda} - 1)^2}.$$

Como $(e^{\lambda} - 1)^2 > 0$ para qualquer $\lambda > 0$, falta provar apenas que o numerador da derivada de $P(X > k | X > 0)$ em relação a λ é estritamente positivo, mas

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{j\lambda^{j-1}}{j!} (e^\lambda - 1) - \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} e^\lambda \\
 = & e^\lambda \left[\sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!} - \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \right] - \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!} \\
 = & \frac{\lambda^k}{k!} e^\lambda - \sum_{j=k}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \\
 = & \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} - \sum_{j=k}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \\
 = & \lambda^k \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{k!j!} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{(j+k)!} \right] \\
 = & \lambda^k \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \left[\frac{1}{k!j!} - \frac{1}{(j+k)!} \right].
 \end{aligned}$$

Sabemos que $(k+1) \times (k+2) \times \dots \times (k+j) > 1 \times 2 \times \dots \times j = j!$, logo $(j+k)! = k!(k+1)(k+2)\dots(k+j) > k!j!$. Portanto,

$$\lambda^k \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \left[\frac{1}{k!j!} - \frac{1}{(j+k)!} \right] > 0.$$

□

C.3 Desigualdade de Bernoulli

Em um corpo ordenado K , seja $x \in K$ tal que $x \geq -1$ e seja $n \in \mathbb{N}$. Então vale $(1+x)^n \geq 1+nx$.

A demonstração dessa desigualdade é feita por indução. Para o caso $n = 1$, temos a igualdade $(1+x)^1 = 1+x$. Agora suponha que a desigualdade é verdadeira para o caso $n = k$: $(1+x)^k \geq 1+kx$. Com essa hipótese, vamos provar que vale para o caso $n = k+1$:

$$\begin{aligned}
 (1+x)^{k+1} &= (1+x)(1+x)^k \geq (1+x)(1+kx) = 1+kx+x+kx^2 \\
 &= 1+(k+1)x+kx^2 \geq 1+(k+1)x.
 \end{aligned}$$

□

C.4 Cauda Binomial

Seja X uma variável aleatória com distribuição $Bin(n,p)$. Vamos provar por indução que $P(X \geq k-1) \geq 1 - \binom{n}{2}(1-p)^2$. O caso em que $n = 2$, ou seja, quando $X \sim Bin(2,p)$ é válido pois

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{2}{0}(1-p)^2 = 1 - \binom{2}{2}(1-p)^2.$$

Agora suponha que a desigualdade vale para o caso $n = k$, isto é, se $Z \sim Bin(k,p)$, então $P(Z \geq k-1) \geq 1 - \binom{k}{2}(1-p)^2$. Vamos usar essa hipótese para provar que a desigualdade vale para $n = k+1$, em que $X \sim Bin(k+1,p)$. Observe que X tem a mesma distribuição de $W + Y$, onde $W \sim Bin(k,p)$ e $Y \sim Bernoulli(p)$ são independentes. Temos então que

$$\begin{aligned}
 P(X \geq k) &= P(W + Y \geq k) \\
 &= P(W + Y \geq k \mid Y = 0)P(Y = 0) + P(W + Y \geq k \mid Y = 1)P(Y = 1) \\
 &= P(W \geq k)(1-p) + P(W \geq k-1)p.
 \end{aligned}$$

Como as variáveis W e Y são independentes,

$$\begin{aligned} P(X \geq k) &= P(W \geq k)(1-p) + P(W \geq k-1)p \\ &= (1-p)[P(W \geq k-1) - P(W = k-1)] + P(W \geq k-1)p \\ &= P(W \geq k-1) - P(W = k-1)(1-p). \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução,

$$\begin{aligned} P(X \geq k) &\geq 1 - \binom{k}{2}(1-p)^2 - \binom{k}{k-1}p^{k-1}(1-p)^2 \\ &= 1 - \frac{k-1}{k+1} \binom{k+1}{2}(1-p)^2 - \frac{2}{k+1} \binom{k}{k-1}p^{k-1}(1-p)^2 \\ &= 1 - \frac{k-1}{k+1} \binom{k+1}{2}(1-p)^2 \left[\frac{k-1+2p^{k-1}}{k-1} \right] \\ &= 1 - \frac{k-1+2p^{k-1}}{k+1} \binom{k+1}{2}(1-p)^2 \\ &\geq 1 - \binom{k+1}{2}(1-p)^2. \end{aligned}$$

A última desigualdade é verdadeira pois $\frac{k-1+2p^{k-1}}{k+1} < 1$. Para provarmos isso, vamos chamar $k+1 = j$. Observe que $k \geq 2$, logo vamos considerar valores para $j \geq 3$. Então temos que

$$\frac{k-1+2p^{k-1}}{k+1} = \frac{j-2+2p^{j-2}}{j} = 1 - \frac{2}{j}(1-p^{j-2}).$$

Como $\frac{2}{j} < 1$ e $0 \leq 1 - p^{j-2} \leq 1$, $\frac{2}{j}(1-p^{j-2}) < 1$. Portanto,

$$0 < 1 - \frac{2}{j}(1-p^{j-2}) < 1,$$

ou seja,

$$0 < \frac{k-1+2p^{k-1}}{k+1} < 1.$$

□

C.5 Desigualdades Exponenciais

Nesta seção vamos apresentar duas desigualdades envolvendo funções exponenciais.

- Vamos mostrar que $1 - x \leq e^{-x}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Para isso, considere a função $f(x) = e^{-x} + x - 1$. Vamos mostrar que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Calculando a primeira derivada de $f(x)$, temos que $f'(x) = 1 - e^{-x}$. Observe que:

$$f'(x) \begin{cases} = 0 & \text{se } x = 0, \\ > 0 & \text{se } x > 0, \\ < 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

A primeira derivada então nos dá as seguintes informações:

- A única raiz de f é 0, isto é, $f(0) = 0$;
- $f(x) \geq 0$ se $x > 0$, pois sua derivada é positiva nesse intervalo;
- $f(x) \geq 0$ se $x < 0$, porque $f'(x) < 0$ para esse intervalo de x .

Portanto, $e^{-x} + x - 1 \geq 0 \Rightarrow e^{-x} \geq 1 - x$.

□

- Queremos provar que para $x > 0$ vale a desigualdade $\frac{1}{x} > e^{-x}$. Para isso vamos analisar a função:

$$g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = 1 - xe^{-x}$$

A primeira derivada de g é dada por $g'(x) = xe^{-x} - e^{-x}$ e, como $e^{-x} > 0$ para todo x , temos que

$$g'(x) \begin{cases} = 0 & \text{se } x = 1, \\ > 0 & \text{se } x > 1, \\ < 0 & \text{se } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Note que $g(1) = 1 - 1/e > 0$. Com essa observação e a análise da primeira derivada, chegamos às seguintes afirmações:

- $g(x) \geq 0$ se $x > 1$, pois sua derivada é positiva nesse intervalo e $g(1) > 0$;
- $g(x) \geq 0$ se $0 < x < 1$, porque $g'(x) < 0$ para esse intervalo e $g(1) > 0$.

Então, como estamos considerando $x > 0$,

$$1 - xe^{-x} > 0 \Rightarrow 1/x > e^{-x}.$$

□

Referências Bibliográficas

- [1] Aizenman, M. e Barsky, D. *Sharpness of the phase transition in percolation models.* Comm. Math. Phys., **108(3)**, 489-526, (1987).
- [2] Athreya, S. e Swart, J. *Survival of contact processes on the hierarchical group.* Probab. Theory Related Fields, **147(3-4)**, 529–563, (2010).
- [3] Bartle, Robert. *The elements of integration and Lebesgue measure.* Wiley-Interscience, (1995).
- [4] Bollobás, B., Janson, S. e Riordan, O. *The phase transition in inhomogeneous random graphs.* Random Structures and Algorithms, **31(1-2)**, 3-122, (2007).
- [5] Broadbent, S. Hammersley, J. *Percolation processes.* Journal Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **53**, 629-641, (1957).
- [6] Burton, R., Keane, M. *Density and uniqueness in percolation.* Communications in Mathematical Physics, **121**, 501-505, (1989).
- [7] Cox, J. e Durrett, R. *Limit theorems for the spread of epidemics and forest fires.* Stochastic processes and their applications, **20(2)**, 171-191, (1988).
- [8] Dawson, D. e Gorostiza, L. *Percolation in an ultrametric space.* Electronic Journal of Probability, **18**, 1-26, (2013).

- [9] Diekmann, O. e Heesterbeek, J. *Mathematical epidemiology of infectious diseases: model building, analysis and interpretation*. Wiley, (2000).
- [10] Gandolfi, A., Keane, M. and Newman, C. *Uniqueness of the infinite component in a random graph with applications to percolation and spin glasses*. Probability Theory and Related Fields, **92**, 511-527, (1992).
- [11] Grimmett, Geoffrey. *Percolation*. Springer, (1999).
- [12] Gutierrez, Carlos. *Introduccion a la teoria ergodica*. Pro-Mathematica, **4**, 11-12, (1992).
- [13] Hara, T., Slade, G. *Mean-field critical behaviour for percolation in high dimensions*. Communications in Mathematical Physics, **128**, 333-391, (1990).
- [14] Hara, T., Slade, G. *Mean-field behaviour and the lace expansion*. Probability and Phase Transition, 87-122, (1994).
- [15] Harris, T. *A lower bound for the critical probability in a certain percolation process*. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **56**, 13-20, (1960).
- [16] James, Barry. *Probabilidade: Um curso em nível intermediário*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, (2004).
- [17] Kesten, Harry. *Percolation Theory for Mathematicians*. Birkhauser, (1982).
- [18] Koval, Vyacheslav; Meester Ronald and Trapman, Pieter. *Long-range percolation on the hierarchical lattice*. Eletronic Journal of Probability, **57**, 1-21, (2012).
- [19] Lawler, Gregory. *Introduction to stochastic processes*. Chapman Hall, **Branching Process**, 45 - 49, (2004).
- [20] Lima, Elon. *Curso de Análise* Instituto de Matemática Pura e Aplicada, **Desigualdade de Bernoulli**, v.1, 11.ed., 69, (2006).

- [21] Mañé, Ricardo. *Teoria Ergódica*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, **O Teorema de Birkhoff**, 115, (1983).
- [22] Meester, R. e Trapman, P. *Bounding basic characteristics of spatial epidemics with a new percolation model*, Adv. in Appl. Probab., **43(2)**, 335-347, (2011).
- [23] Menshikov, M. *Coincidence of critical points in percolation problems*, Soviet Mathematics Doklady, **33**, 856-859, (1986).
- [24] Oliveira, Krerley. *Um primeiro curso sobre teoria ergódica com aplicações*. IMPA, (2005).
- [25] Resnick, Sidney. *Adventures in Stochastic Process*. Birkhauser, 21-22, (2005).
- [26] Russo, L. *A note on percolation*. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete, **43**, 39-48, (1978).
- [27] Seymour, P., Welsh D. *Percolation probabilities on the square lattice*. Advances in Graph Theory, 227-245, (1978).
- [28] Shiryaev, A. *Probability*. Springer, (1995).
- [29] Trapman, Peter. *The growth of the infinite long-range percolation cluster*. Ann. Probab., **38(4)**, 1583-1608, (2010).