

**Universidade Federal de Minas
Gerais Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Estatística**

**Testes de Vida Acelerados:
Uma Aplicação em Sala de Aula**

Enrico A. Colosimo
Renato Hudson

**Relatório Técnico
RTE-01/2002
Série Ensino**

Testes de Vida Acelerados: Uma Aplicação em Sala de Aula

Enrico A. Colosimo

Renato Hudson

Depto. de Estatística - UFMG

Resumo

Um importante aspecto da qualidade é a confiabilidade. Hoje uma das ferramentas mais sofisticadas para estudarmos a confiabilidade de produtos e itens é o teste de vida acelerado. Esta ferramenta resulta em estimativas rápidas sobre a durabilidade de produtos, e não é necessário que todos os itens submetidos ao teste tenham que falhar.

O aprendizado é mais eficiente quando os alunos trabalham sobre um projeto. A prática fixa todas as idéias e conceitos apresentados em sala de aula, motivando um maior relacionamento com o assunto e o mundo real. A dissolução de comprimidos efervescentes, é um processo simples rápido e barato, permitindo a sua replicação em sala de aula, onde o tempo e os recursos são escassos.

Supondo que não temos tempo o suficiente para aguardarmos a dissolução completa de comprimidos, decidimos submetê-los a um certo nível de estresse e, com base nos tempos até as falhas, estimamos as quantidades de interesse relacionadas ao tempo de falha. O comprimido simula o produto sob teste. A temperatura da água é o fator de estresse. O modelo Arrhenius-Lognormal foi ajustado adequadamente aos dados, permitindo obter a estimativa de 65,7 segundos em média para a dissolução do comprimido a uma temperatura de 25 C°.

1 - Introdução

O conceito de confiabilidade se tornou latente com o advento da produção em massa. Na época das manufaturas o produto era feito por uma única pessoa, o artesão tinha o controle de todo o processo, e os produtos eram de boa qualidade. Com a introdução da produção em série, o indivíduo é responsável por um único processo dentro da cadeia de produção, não garantindo as características finais do produto. Surgiu então a questão da qualidade, uma das características da qualidade é a confiabilidade. A confiabilidade pode ser definida como sendo a capacidade de operação dentro das condições determinadas de uso durante um período predeterminado.

A confiabilidade é um fator fundamental para o sucesso de qualquer empresa. As marcas que possuem uma reputação de baixa confiabilidade são penalizadas pelos consumidores, e possuem um baixo valor agregado ao produto. Uma das áreas que mais utiliza e que contribui para o desenvolvimento de ferramentas para a análise de confiabilidade é a indústria de eletro-eletrônicos. Tomemos por exemplo os computadores. A indústria computacional lança a cada 6 meses uma nova geração de PC's, uma das fases de projeto é avaliação da confiabilidade das máquinas. Se os fabricantes fossem estimar o tempo médio de vida dos computadores aguardando que um conjunto de 50 máquinas sob condições normais de uso viesse a falhar, haveria um sério gargalo entre a fase de projeto e produção. Isto devido ao tempo necessário para obtermos estes dados de confiabilidade.

Frente ao impasse da confiabilidade versus tempo de projeto, algumas ferramentas foram criadas para minimizar este problema. Uma forma rápida de obter esta informação é através dos **testes de vida acelerados** (Nelson,1990). Os produtos são submetidos a uma alta taxa de uso ou sob condições hostis de funcionamento e extrapolamos através de um modelo de regressão estatístico-físico para obtermos estimativas sob as condições normais de uso. Uma característica dos testes acelerados é não ter de aguardar que todos os produtos falhem para obtermos estimativas sobre o tempo de vida.

Todas as vezes que empregamos a estatística para estudar algum fenômeno, devemos essencialmente começar por construir um modelo determinístico e probabilístico para descrever a sua natureza. Inevitavelmente, o modelo depende de que os pormenores desprezados não tenham realmente muita importância na elucidação do fenômeno estudado. Geralmente é bastante difícil afirmar com certeza se um modelo estatístico especificado é ou não adequado, antes que alguns dados observacionais sejam obtidos. A fim de verificar a validade de um modelo, deveremos obter conclusões de nosso modelo e, a seguir, comparar esses resultados previstos com os valores obtidos.

Durante a experiência devemos avaliar quais fatores exercem influência no processo, e conseqüentemente deverá ser incluído no modelo. Por outro lado, os fatores que exercem pouca influência deverão ser omitidos. Muitas respostas foram obtidas através de experiência prática e bom senso. A experimentação apresenta vários problemas que são específicos ao processo, impondo aos alunos pensar qual a melhor solução. O aluno somente estará apto a criticar quando conhecer quais os fundamentos da metodologia.

Diante deste quadro, advogamos que a melhor forma de aprender os conceitos metodológicos é utilizando-os. Neste artigo, vamos descrever um experimento possível de ser realizado em sala de aula para exemplificar a utilização do testes de vida aceleradas. O artigo está dividido da seguinte forma: na seção 2 apresentamos a relação determinística entre a resposta média e a variável de estresse. Na seção 3 apresentamos os modelos estatísticos para os testes de vida acelerados. Na seção 4 é apresentada a descrição e análise do experimento a ser desenvolvido em sala de aula. O artigo termina com algumas conclusões sobre a importância da experiência.

2 - Relação Estresse-Resposta

Definimos a temperatura como sendo a variável de estresse mas não definimos a relação existente entre nível de estresse e o tempo de vida. Em qualquer teste de vida acelerado sempre haverá a necessidade de definir uma equação que relacione o nível de estresse e o tempo médio de vida. Poderíamos sugerir uma relação qualquer, mas não teríamos a justificativa para estarmos usando-a, por isso buscamos modelos físico-químicos que possuem embasamento científico.

Uma das relações mais importantes e que se adapta à maioria dos problemas é a relação de Arrhenius. Para compreendermos a relação de Arrhenius, dois conceitos químicos deverão ser introduzidos; (1)energia de ativação e (2)quantidade crítica. Explicaremos este conceito através de uma reação que acontece diariamente em nossas casa. Quando riscamos os fósforos eles entram em combustão e a energia de ativação foi obtida pelo atrito do fósforo com a caixa. A quantidade crítica é a superfície do fósforo que está em contato, quanto maior a superfície de contato do fósforo mais fácil será acendê-lo.

A equação de Arrhenius é estabelecida da seguinte forma:

$$T = A \cdot e^{\left(\frac{E}{k\tau}\right)}$$

Em que: T = tempo até a falha;
A = quantidade crítica;
E = energia de ativação, que é medido em elétron-volts;
K = constante de Boltzmann 86,171 μ K;
 τ = temperatura absoluta em Kelvin.

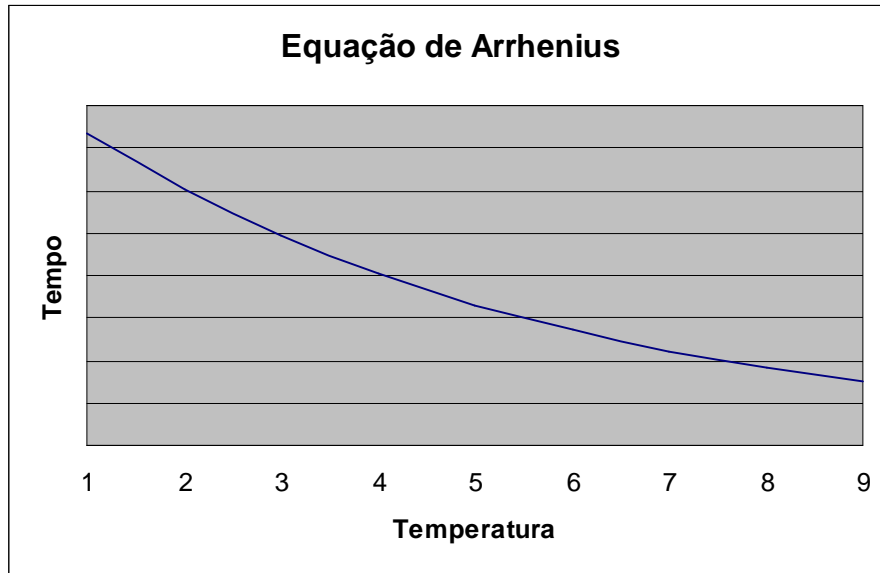
A temperatura é usualmente medida em graus centígrados. Desta forma, temos que convertê-la para graus Kelvin. A conversão poderá ser feita da seguinte forma:

$$^{\circ}\text{k} = ^{\circ}\text{C} + 273,16 \quad \text{Equação 3}$$

em que: $^{\circ}\text{k}$ = temperatura em graus Kelvin;
 $^{\circ}\text{C}$ = temperatura em graus centígrados.

Conhecendo todos os valores da energia de ativação e a quantidade crítica, o tempo de vida médio seria calculado apenas com base na temperatura em que o componente será usado. Mas como não sabemos qual é o valor da energia de ativação e qual é o valor da quantidade crítica, precisamos de uma estimativa. O gráfico 1 mostra a relação entre o tempo de reação e a temperatura utilizando a relação de Arrhenius.

Gráfico 1 – Forma Característica da Relação de Arrhenius



Como a relação de Arrhenius se caracteriza por uma curva, aplicaremos uma transformação para obtermos uma forma linearizada, facilitando análise. Aplicando o logaritmo em ambos os termos da equação obtemos:

$$\ln(T) = \ln(A) + \left(\frac{E}{k} \right) \cdot \tau^{-1} \quad \text{Equação 3.1}$$

e desta forma

$$\ln(T) = \beta_0 + \beta_1 \cdot \tau^{-1} \quad \text{Equação 3.2}$$

Fazendo a seguinte simplificação:

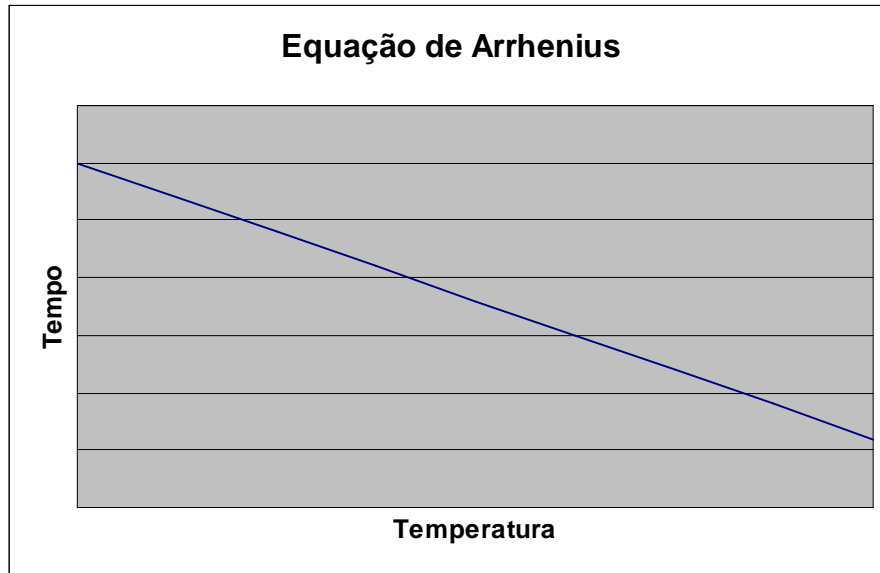
$$x = \tau^{-1} \quad \text{Equação 3.3}$$

obtemos finalmente:

$$\ln(T) = \beta_0 + \beta_1 \cdot x \quad \text{Equação 3.4}$$

Fazendo uma transformação logarítmica no Gráfico 1 obtemos como resultado o Gráfico 2.

Gráfico 2– Linearização do Tempo de Falha vs. Temperatura



Usando o modelo de Arrhenius obtemos estimadores pontuais para os parâmetros do modelo. Com a combinação da distribuição de probabilidade, adiciona-se um intervalo onde o tempo de falha é mais provável de ocorrer. O intervalo permite uma avaliação sobre a precisão do modelo, por isso ele é de grande importância.

3 - Método Estatístico

Nesta seção um modelo estatístico é constituído de dois componentes: o componente determinístico e o estocástico.

$$Y = \ln(T) = \beta_0 + \beta_1 x + \sigma \epsilon$$

A primeira parte é o modelo determinístico, onde o x é o nível de estresse na relação de Arrhenius, o $\sigma \epsilon$ é a colaboração da distribuição de probabilidade. As distribuições mais utilizadas em confiabilidade são Weibull, lognormal e exponencial. O modelo determinístico insere a tendência, e o modelo estatístico insere a variabilidade. Usando o modelo matemático obtemos estimativas pontuais e estimativas intervalares para as quantidades de interesse.

A análise de regressão, é frequentemente empregada quando se deseja traçar uma reta que relacione duas ou mais variáveis. Mas infelizmente não poderemos utilizá-la pois nem todos os produtos sob teste falham. Caso usássemos somente as informações sobre os componentes que falharam estaríamos introduzindo uma tendência no modelo, pois estaríamos rejeitando os produtos que foram bem no teste e não falharam. O método de estimação de máxima verossimilhança contorna este problema onde a informação tanto sobre os componentes que falharam, quanto sobre os componentes que não apresentaram falhas é levada em consideração. Os cálculos para a obtenção deste estimadores são complexos e praticamente todos os pacotes estatísticos possuem esta opção de cálculo. Abordaremos apenas como se baseia, deixando os cálculos para serem feitos nos pacotes estatísticos.

3.1 Estimador de Máxima Verossimilhança

Supondo que obtemos uma amostra independente e igualmente distribuída. A função de verossimilhança assume a seguinte forma:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^r f(t_i; \theta) \cdot \prod_{i=r+1}^n S(t_i; \theta)$$

Onde o produtório da função f entra com a informação dos produtos que falharam e o produtório da função S entra com a informação sobre os produtos que sobreviveram. Os valores dos parâmetros são encontrados fazendo a derivada do $\text{Log } L(\theta)$ igual a zero.

Existem algumas distribuições que são freqüentemente utilizadas nos testes de vida acelerada. No modelo supomos que, para cada nível de estresse, o tempo de falha segue a mesma distribuição de probabilidade. O que faz diferir um nível de estresse do outro é o valor do parâmetro de escala da distribuição. O quadro abaixo mostra um resumo sobre as suas características:

Tabela 1- Distribuições Comumente Usadas nos Testes de Vida Acelerados

Distribuição	Taxa de Falha	Número de Parâmetros	Observações
Exponencial	Constante	Medida	Caso Particular da Weibull
Log-Normal	Monotônica	Medida e Escala	Pode ser obtida da Normal
Weibull	Não monotônica	Medida e Escala	

Com base na amostra obtida, usaremos o método de máxima verossimilhança para estimação do modelo.

O resíduo pode ser calculado com a seguinte formula:

$$\hat{\varepsilon} = \frac{Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x}{\sigma}$$

em que: ε é o i -ésimo erro

Y é o i -ésimo tempo de vida

σ é desvio padrão do modelo

β_0 é o intercepto do modelo

$\beta_1 x$ é o coeficiente vezes a temperatura inversa

Os resíduos são utilizados para a verificação da adequação do modelo.

4 - Descrição do Experimento

O experimento em questão envolve a dissolução de um comprimido efervescente em três diferentes temperaturas. Inicialmente, deveremos definir claramente o evento de interesse. O comprimido deve ser considerado dissolvido quando não enxergamos nenhum pedaço e as borbulhas não se movimentam. É importante definir o evento de interesse com cuidado para não torna-lo ambíguo. Após a definição da falha, devemos escolher a unidade tempo que utilizaremos para medir a dissolução dos comprimidos. Como a reação é muito rápida, o segundo é a unidade mais indicada. De forma a obter tempos de falha mais rápidos, devemos escolher uma variável de estresse. Como a temperatura é um fator que acelera as reações de dissolução a usa-la-emos como variável de estresse.

Uma regra que vem sendo bastante empregada no planejamento do teste de vida acelerado é o plano de compromisso (Meeker e Hahn, 1985). O plano de compromisso fixa o número de níveis de estresse igual a 3, e divide a quantidade de produtos a serem testados nas seguintes proporções: no nível intermediário, o número de produtos sob teste é igual à metade do número de produtos sob teste no nível mais baixo, e no nível mais alto o número de produtos sob teste é a metade do número de produtos sob teste no nível intermediário. Resultando na seguinte proporção 4:2:1. Justificamos esta divisão pelo fato dos tempos de falha aumentarem quando o nível de estresse é reduzido. Se o número de produtos sob teste fosse o mesmo em todos os níveis, teríamos mais falhas no nível mais alto onde não nos interessa. Como estamos interessados em demonstrar a metodologia, não abordaremos a questão referente à determinação de tamanho de amostra. Usando a razão 4:2:1, na temperatura baixa foram dissolvidos 27 comprimidos, na temperatura intermediária foram dissolvidos 14 comprimidos, e na temperatura mais alta foram dissolvidos 7 comprimidos.

Como não temos uma indicação da variabilidade envolvida no processo, os níveis de estresse foram selecionados de maneira subjetiva e viável em termos práticos. Devemos observar que as estimativas para as condições de uso normal são obtidas através de extrapolações, por isso quando selecionarmos o nível baixo de estresse, ele não deverá ser muito alto da forma que venha dificultar a extrapolação.

Decidimos usar o nível alto de estresse como sendo 60°C. A justificativa é a segurança em ter uma menor temperatura na água e o seu rápido aquecimento. Após selecionarmos o nível alto, o baixo de estresse foi definido em 40°C onde já existe um estresse considerável e não estamos muito distante da temperatura comumente usada na dissolução dos comprimidos. O nível intermediário de estresse é a média entre as duas temperaturas, 50°C.

Aleatorização quanto à ordem segundo a qual os ensaios individuais do experimento serão realizados, são determinados aleatoriamente de forma que os efeitos não-controlados que afetem as variáveis respostas durante a realização da experiência sejam balanceados entre todas as temperaturas. Os materiais e procedimentos para conduzir este experimento são apresentados a seguir.

4.1 Materiais e Procedimentos

49 comprimidos efervescentes;

1 termômetro;

1 becker 300ml.;

1 cronômetro;

Fonte de calor ajustável (bico de Bunsen ou Banho-Maria)

- a) Selecionamos aleatoriamente a ordem em que os comprimidos serão dissolvidos;
- b) Ajustamos a temperatura de acordo com a ordem obtida no sorteio;
- c) Colocamos 200ml. de água em um becker;
- d) Inserimos o termômetro dentro do becker e esperamos a água atingir a temperatura esperada (40, 50 e 60);
- e) Retiramos o becker da fonte de calor e inserimos o comprimido, disparando o cronômetro;
- f) Após terminada a efervescência registramos o tempo obtido no cronômetro e anotamos na tabela do planejamento;
- g) Jogamos fora a água do becker e o lavamos;
- h) Voltamos ao passo b).

Este procedimento é então repetido 48 vezes. Ou seja uma vez para cada unidade amostral.

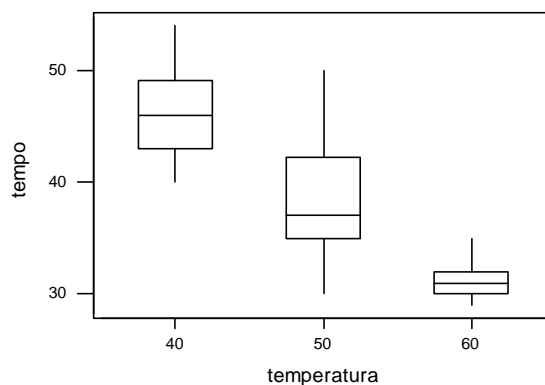
4.2 Análise Descritiva

Após a dissolução de todos os comprimidos, observamos que apesar deles serem todos aparentemente idênticos e as temperaturas serem as mesmas, o tempo de dissolução não foi idêntico. Esta é a variabilidade natural associada ao experimento. Na dissolução dos comprimidos controlamos somente a temperatura, mas inúmeros fatores influenciaram a dissolução. A maneira que o comprimido foi lançado no becker, o pH da água, a maneira em que o cronômetro foi acionado, o ponto de vista de quem acompanha a dissolução, e a própria variabilidade da composição do comprimido afetaram a experiência de modo, que sendo na mesma temperatura, os comprimidos dissolveram em tempos diferentes. Usamos vários comprimidos para obtermos uma estimativa da variabilidade devido ao erro experimental. A tabela 1 apresenta os valores obtidos no experimento, observe que não existem censuras neste banco de dados.

Tabela 2 – Tempo gasto na dissolução dos comprimidos (em segundos)

40 °C				50 °C		60 °C
40	43	46	50	30	37	29
40	43	47	50	33	40	30
41	45	47	50	35	40	31
42	45	47	52	35	42	31
42	45	47	53	36	43	32
42	45	48	54	37	45	32
43	46	49		37	50	35

Figura 3 – Temperatura vs. Tempo de Dissolução



Observando a figura 1, vemos uma redução do tempo de falha com o acréscimo da temperatura. Visualizamos uma relação entre temperatura e a variabilidade do tempo até a falha. Na temperatura de 40C,° o Box-plot ficou simétrico, o que não é comum nos testes de vida acelerada. O esperado é uma cauda à esquerda que pode ser interpretado com o fato das falhas tornarem-se menos prováveis à medida que o produto sobrevive. Este comportamento é observado para os outros dois níveis de temperatura.

A função de confiabilidade é definida como sendo a probabilidade de um produto sobreviver a t unidades de tempo. A função taxa de risco é definida como sendo a taxa de falha em t dado que ainda não ocorreu. A função de taxa de falha é útil para descrever a

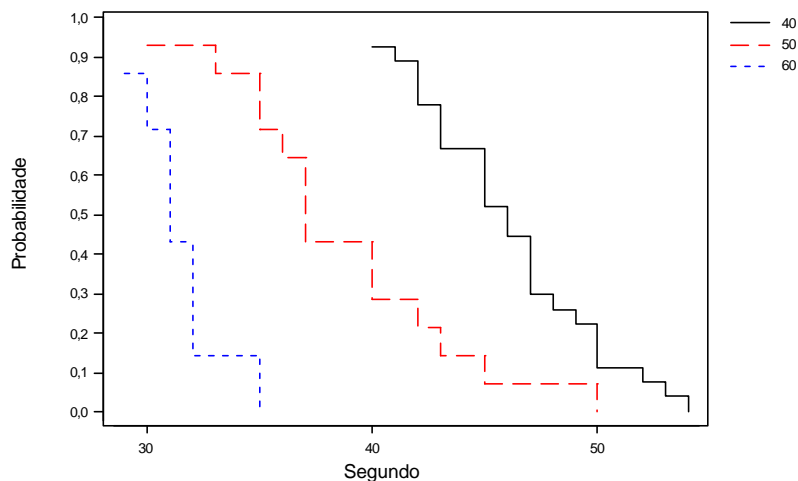
distribuição do tempo de vida de produtos. Existe uma relação entre taxa de falha e função de probabilidade (Klein e Moeschberger, 1997).

Um estimador de confiabilidade muito difundido é o de Kaplan-Meier, também conhecido como estimador limite-produto. Na ausência de censura, é definido como;

$$\hat{S}(t) = \frac{\text{n}^\circ \text{ de observações que não falharam até o tempo } t}{\text{n}^\circ \text{ total de observações no estudo}}$$

Os estimadores de Kaplan-Meier aparecem na Figura 4.

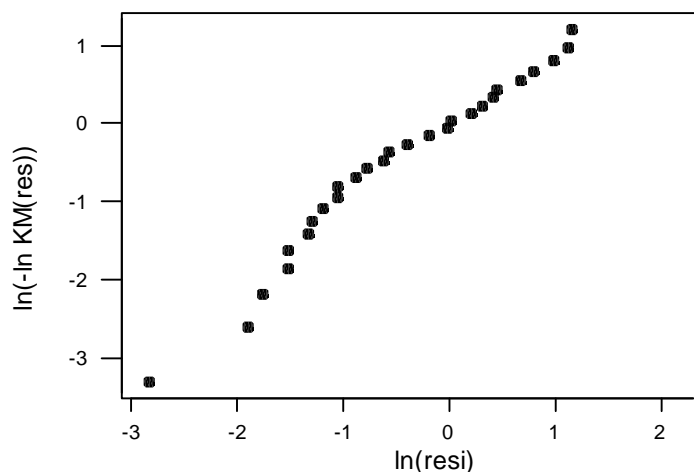
Figura 4 – Estimativa da Função de Sobrevivência



4.3 Seleção do Modelo

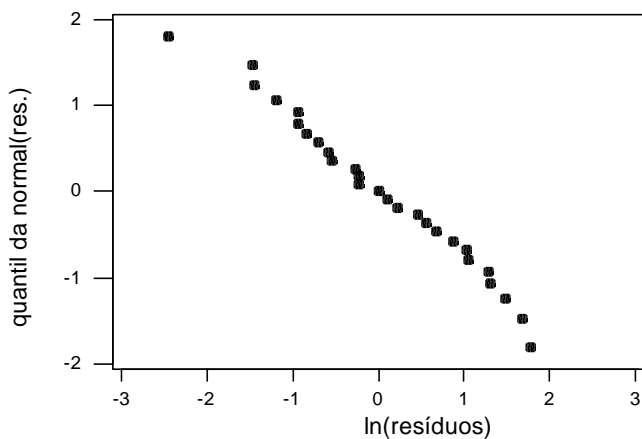
Somente poderemos utilizar o modelo após a verificação das hipóteses. Usaremos os resíduos para fazermos a validação do modelo. Obtemos a estimativa de Kaplan-Meier para a função de confiabilidade permitindo comparar cada nível de stress.

Gráfico 5 – Verificação do Modelo Weibull



Utilizando a distribuição Weibull, foi feito o Kaplan-Meier dos resíduos, e os valores estimados da função de confiabilidade. Então foi construído o gráfico $\ln(-\ln(\text{Função de sobre. Res.}))$ vs. $\ln(\text{resíduos})$, como os pontos não foram alinhados em torno de uma reta, a distribuição Weibull e exponencial não serão utilizadas.

Gráfico 6 – Verificação do Modelo Lognormal



Para a distribuição Lognormal, fizemos o Kaplan-Meier dos resíduos, e calculamos os valores da função de confiabilidade. Então construímos o gráfico $\phi(\text{Função de sobre. dos res.})$ Vs. $\ln(\text{resíduos})$, onde ϕ é a função de probabilidade acumulada inversa da distribuição normal. Como os pontos ficaram alinhados, utilizaremos este modelo.

Resultados

Este é o seguinte modelo estimado:

Tabela 3 – Estimativa para o modelo Log-Normal

Log-Normal						
Preditor	Coef.	Erro	Z	P	Inferior	Superior
Intercepto	-2,3404	,658	-3,56	0,000	-3,63	-1,0507
Temperatura	1931,8	209,6	9,22	0,000	1521,1	2342,6
Escala	0,09732	0,0102			0,07916	0,1196
Log-Máxima Verossimilhança						

Tabela 4 – Matriz de Covariância do Modelo Log-Normal

	Intercepto	Temperatura	Escala
Intercepto	,4	-137,9	0
Temperatura	-137,9	43916	0
Escala	0	0	0,0001

Uma estimativa para a mediana pode ser calculada pela seguinte formula:

$$\hat{Y}_{,5} = \ln(T) = -2,3404 + 17768 \cdot \left(\frac{1}{273,16 + ^\circ\text{C}} \right) + 0,09732 \cdot 0,4801$$

onde °C é a temperatura da água.

Tabela 5 – Quadro comparativo entre observado e estimado

Temperatura	Mediana Observada	Mediana Estimada	Média Obtida	Média Estimada	I.C (95%)
40 °C	47,0	48,1	47,0	48,4	[46,2; 49,9]
50 °C	38,5	39,8	39,1	40,0	[38,0; 41,6]
60 °C	31,0	33,2	31,4	33,4	[31,9; 34,4]

5 - Conclusões

Após a dissolução dos comprimidos nas temperaturas 40, 50 e 60 °C utilizamos a relação de Arrhenius para relacionar tempo de dissolução vs. temperatura. A energia de ativação foi estimada em 0,16eV(elétron-volt), a quantidade crítica foi estimada em 0,0962. Este valor é uma característica do mecanismo de falha do produto. A expressão abaixo pode ser utilizada para estimar o tempo médio de vida (dissolução) do comprimido:

$$\text{Tempo} = \exp \left(-2,3404 + 17768 \cdot \left(\frac{1}{273,16 + ^\circ\text{C}} \right) + 0,09732 \cdot 0,4801 \right)$$

onde °C é a temperatura da água em que será dissolvido o comprimido. A 25 °C, a estimativa do tempo de vida (dissolução) seria 65,7 segundos, com o intervalo de confiança de [64,66; 66,8].

Durante a realização deste experimento vemos a importância que existe na metodologia do planejamento de experimento. A aleatorização como ferramenta para garantir o equilíbrio das fatores que não estão sendo colocados no modelo. Tivemos um maior contato com a prática química, onde aprendemos a manusear o bico de Bunsen, verificamos a

variação que existe nas formas de medir a temperatura. Houve muitos fatores cuja influência só percebemos após iniciar a dissolução, o que vem salientando a importância do teste piloto dentro de uma pesquisa. O tempo gasto em todo o planejamento e execução do experimento foi menor do que 5 horas, e apresentou um custo bastante reduzido. Abaixo apresentamos a planilha de custo:

Equipamento	Custo
Pedestal	R\$ 3,00
Tela de Amianto	R\$ 6,00
Becker	R\$ 8,00
Termômetro	R\$ 11,00
Caixa de Comprimidos	R\$ 12,00
Bico de Bunsen	R\$ 21,00
Total	R\$ 61,00

6 - Bibliografia

COLOSIMO.E.A e FREITAS,M.A; *Confiabilidade: Análise de Tempo de Falha e Testes de Vida Acelerados*. Fundação Christiano Ottoni, 1997.

MEEKER,W.Q. e HAHN,G.J.; *How to Plan na Accelerated Life Test, volume 10 – The ASCQ Basic Referencers in Quality Control: Statistical Techniques*, Milwaukee, 1985.

NELSON,W.; *Accelerated Tests*. John Wiley. New York

KLEIN,P.J. e MOESCHBERGER,M.L.; *Survival Analysis. Spring, 1997*.