

---

# Bioestatística F

## Conceitos de Teste de Hipóteses

---

Enrico A. Colosimo

Depto. Estatística – UFMG

<http://www.est.ufmg.br/~enricoc/>



---

## Exemplo (a)

- Suponha que, entre pessoas saudáveis, a concentração de certa substância no sangue se comporta segundo um modelo Normal com média 14 unidades/ml e desvio padrão 6 unidades/ml.
  - Dez indivíduos doentes foram submetidos a um tratamento experimental. Após o tratamento a média amostral dos indivíduos foi avaliada em 16 unidades/ml. Que conclusão pode ser obtida sobre o tratamento?
-

---

Pergunta: A diferença de 16 para 14 é:

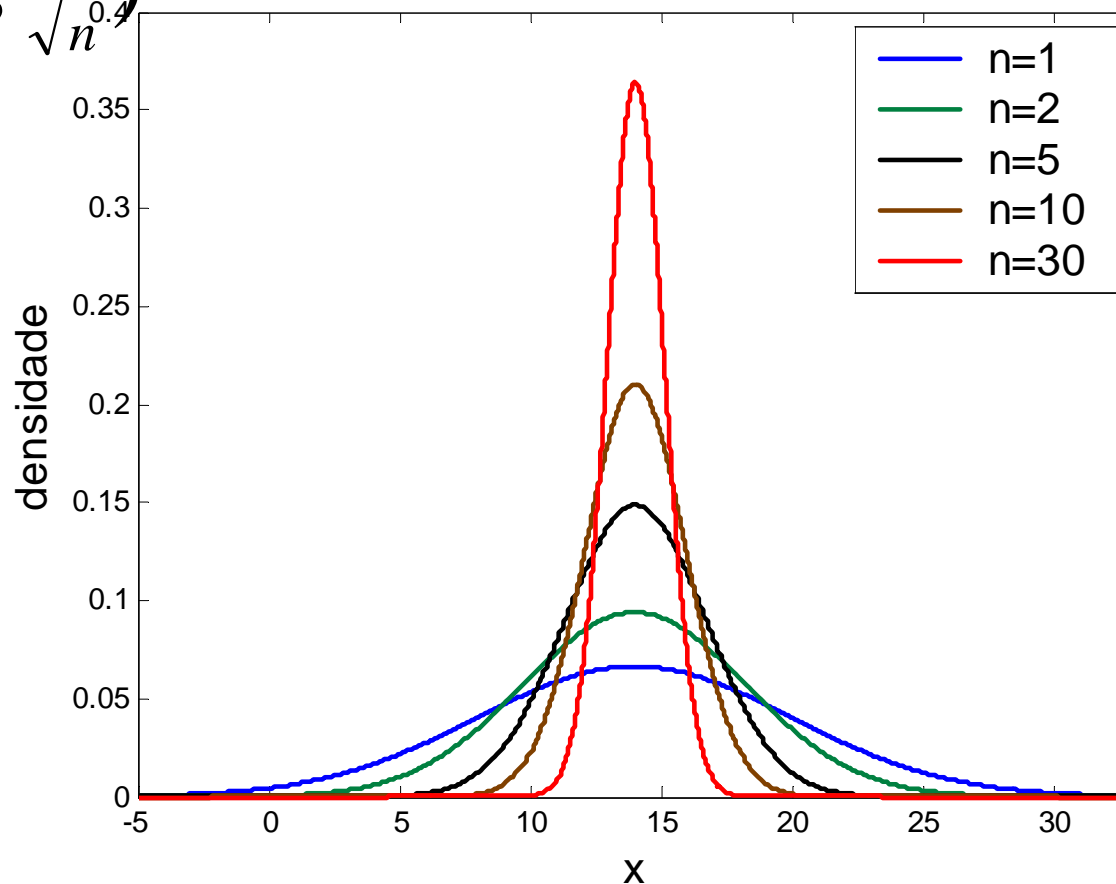
- Grande o suficiente para afirmarmos que o tratamento não fez efeito ou
- Pequena o suficiente para afirmarmos que esta variação foi devido ao acaso.

RESPOSTA: precisamos de uma estatística teste com sua respectiva distribuição de referência para avaliarmos esta pergunta.

---

# Distribuição da média amostral para pessoas sadias: $N(\mu=14, \sigma=6)$

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$



---

## Exemplo (b)

- Pessoas sofrendo de uma doença específica têm a concentração média da substância alterada para 18 unidades/ml. Vamos admitir que, em ambos os casos o desvio padrão é de 6 unidades/ml.
- Queremos testar as hipóteses:

$$H_0: \mu=14 \text{ vs } H_1: \mu=18$$

---

---

# Teste de Hipóteses

- Rejeitar  $H_0: \mu=14$  se

$$\bar{X} \geq c$$

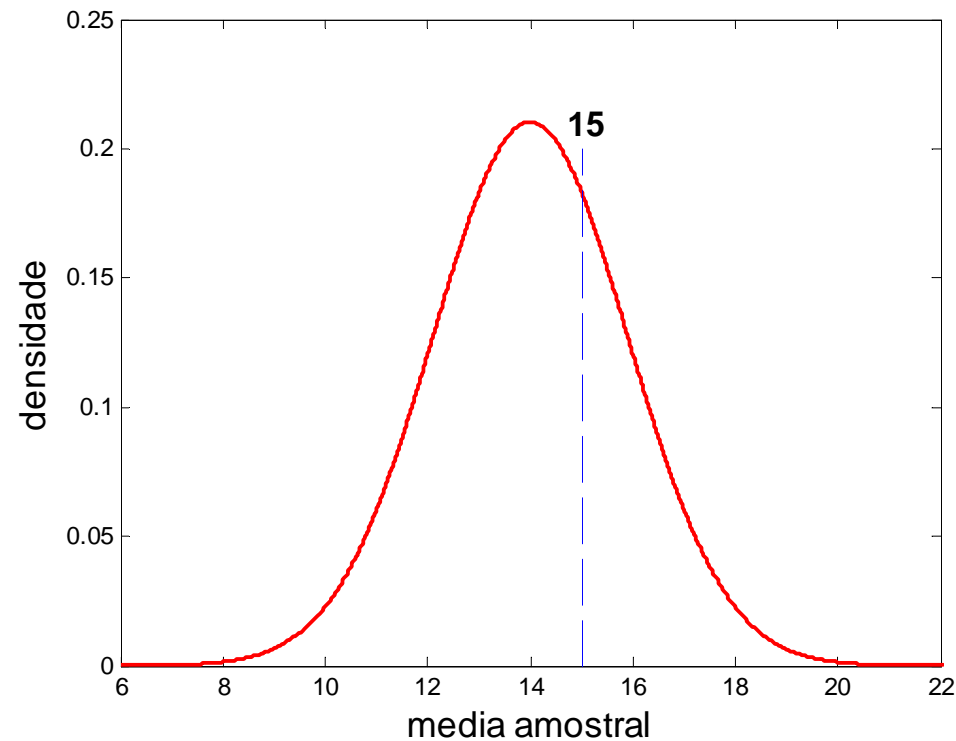
Suponha que  $c=15$  !!!

---

# Supondo que o Tratamento FEZ efeito

- Hipótese: o tratamento funcionou!

$$\bar{X} \sim N\left(14, \frac{6}{\sqrt{10}}\right)$$



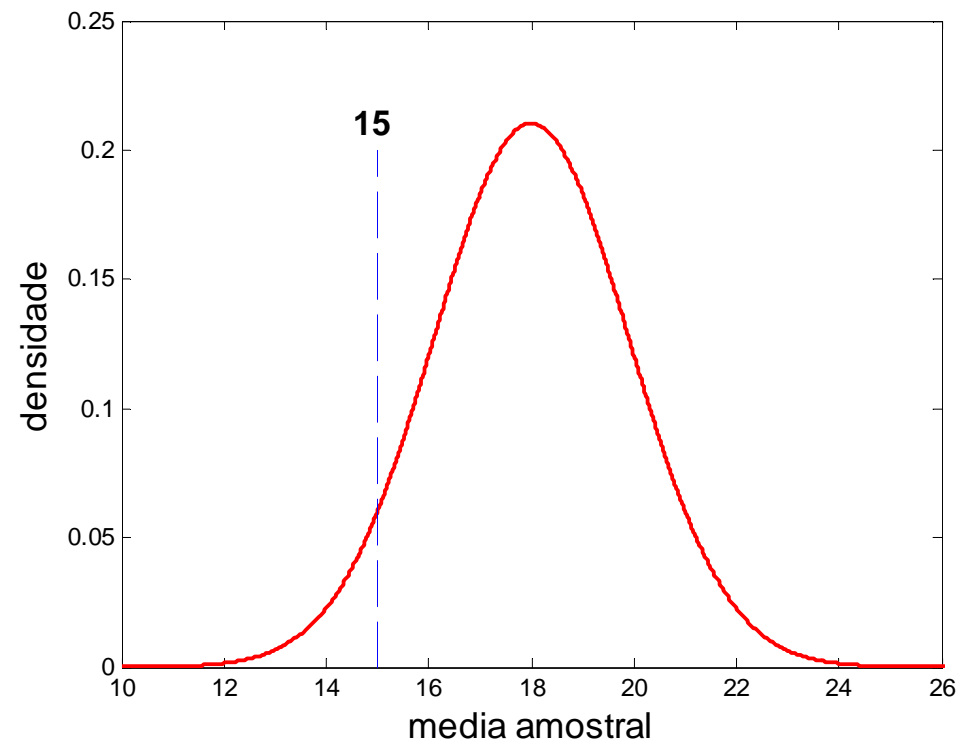
$$P(\bar{X} \geq 15) = P(Z \geq 0.527) = 0.5 - 0.2019 = 0.2981$$



# Supondo que o Tratamento NÃO fez efeito

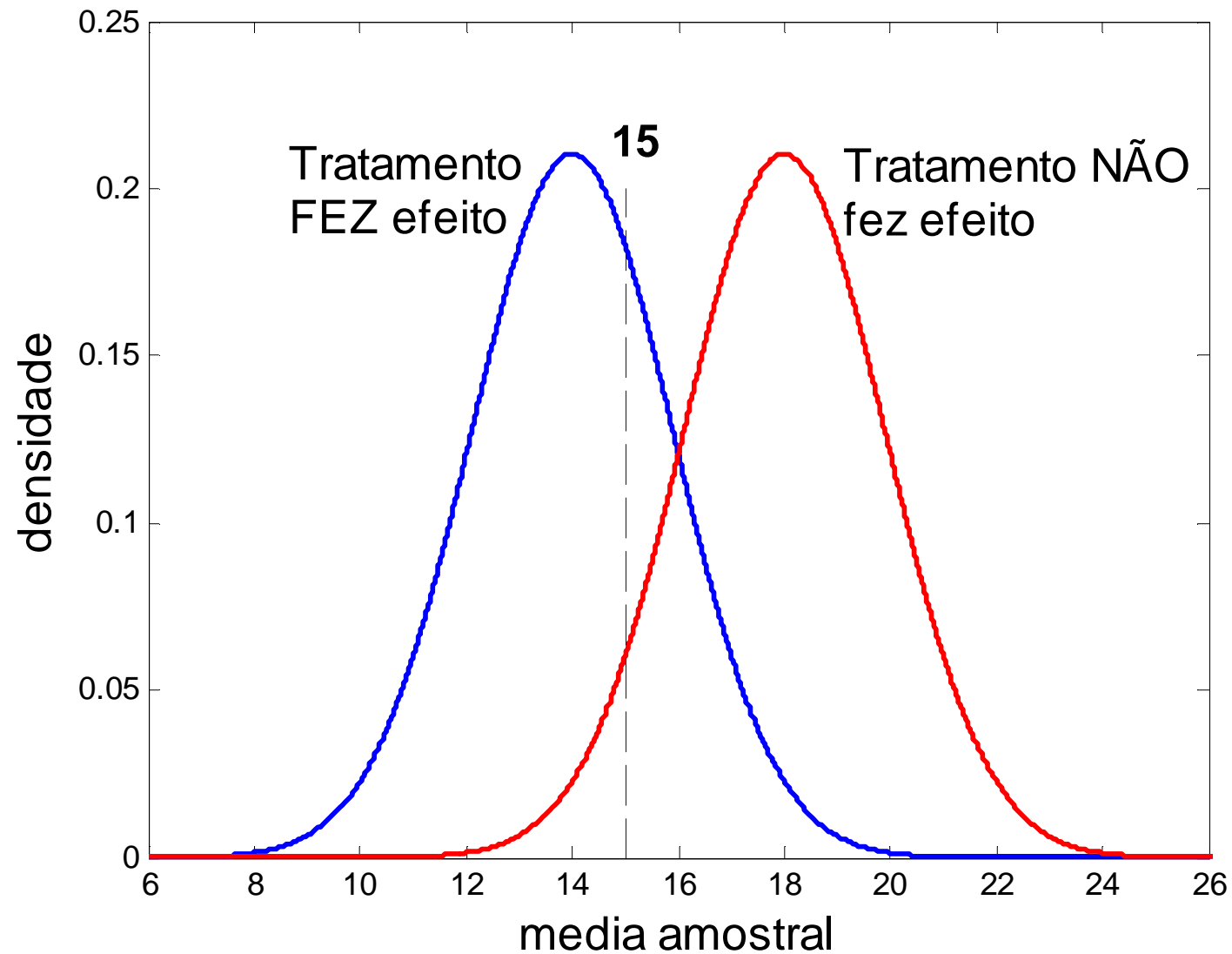
- Hipótese: o tratamento NÃO funcionou!

$$\bar{X} \sim N\left(18, \frac{6}{\sqrt{10}}\right)$$



$$P(\bar{X} \leq 15) = P(Z \leq -1.58) = 0.0571$$

# Comparando as Duas Hipótese



# Erros associados a testes de hipóteses

- Os dois erros que podem ser cometidos ao se realizar um teste de hipóteses são:
  - **Rejeitar a hipótese nula ( $H_0$ ), quando tal hipótese é verdadeira;**
  - **Não rejeitar a hipótese nula ( $H_0$ ) quando ela deveria ser rejeitada**

		Situação	
		$H_0$ Verdadeira	$H_0$ Falsa
Decisão	Rejeitar $H_0$	<b>Erro Tipo I</b>	<b>Sem erro</b>
	Não rejeitar $H_0$	<b>Sem erro</b>	<b>Erro Tipo II</b>

# Erros associados a testes de hipóteses

		Situação	
		H <sub>0</sub> Verdadeira	H <sub>0</sub> Falsa
Decisão	Rejeitar H <sub>0</sub>	<b>Erro Tipo I</b>	<b>Sem erro</b>
	Não rejeitar H <sub>0</sub>	<b>Sem erro</b>	<b>Erro Tipo II</b>

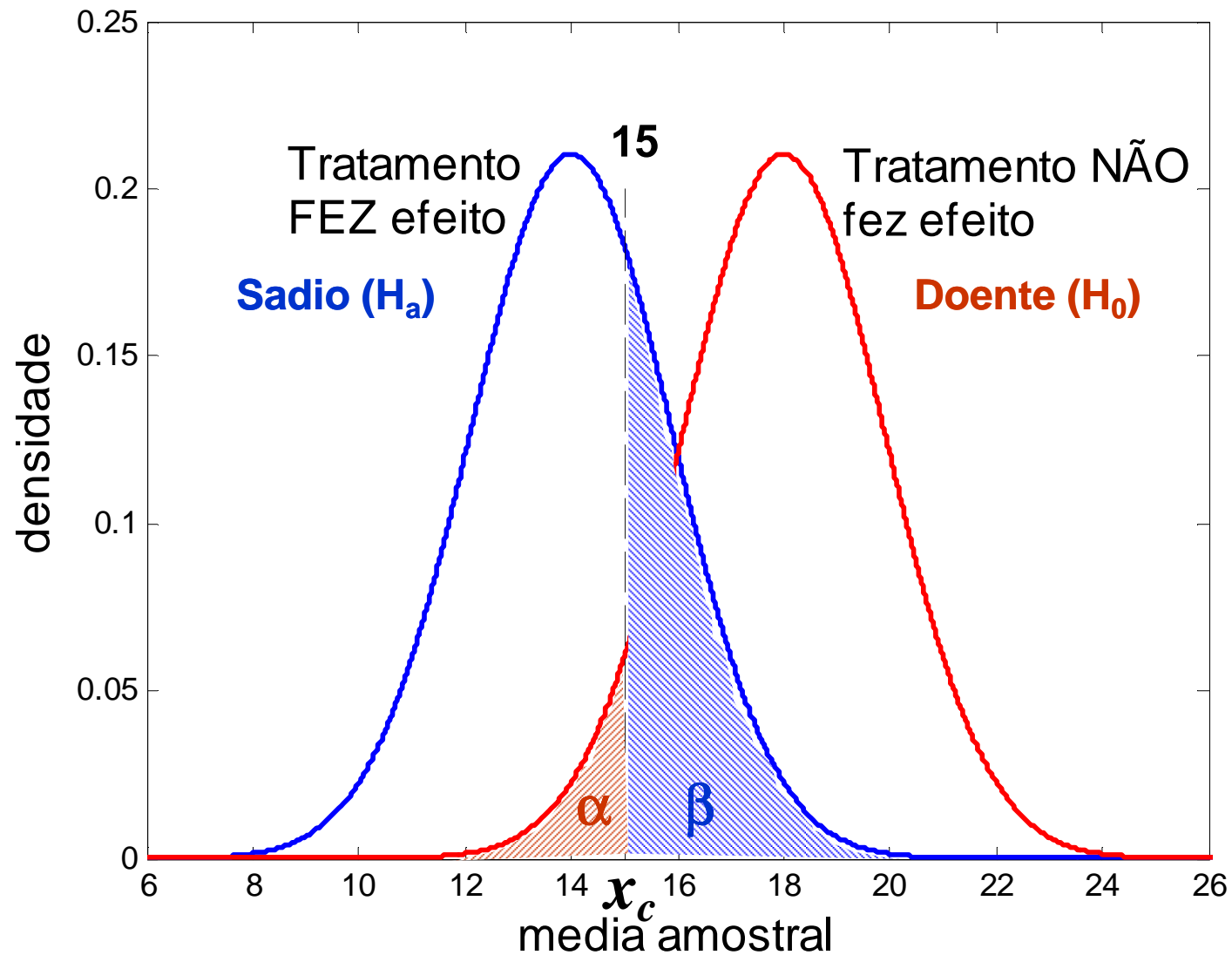
$$\alpha = P(\text{erro tipo I}) = P(\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeira})$$

$$\beta = P(\text{erro tipo II}) = P(\text{não rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa})$$

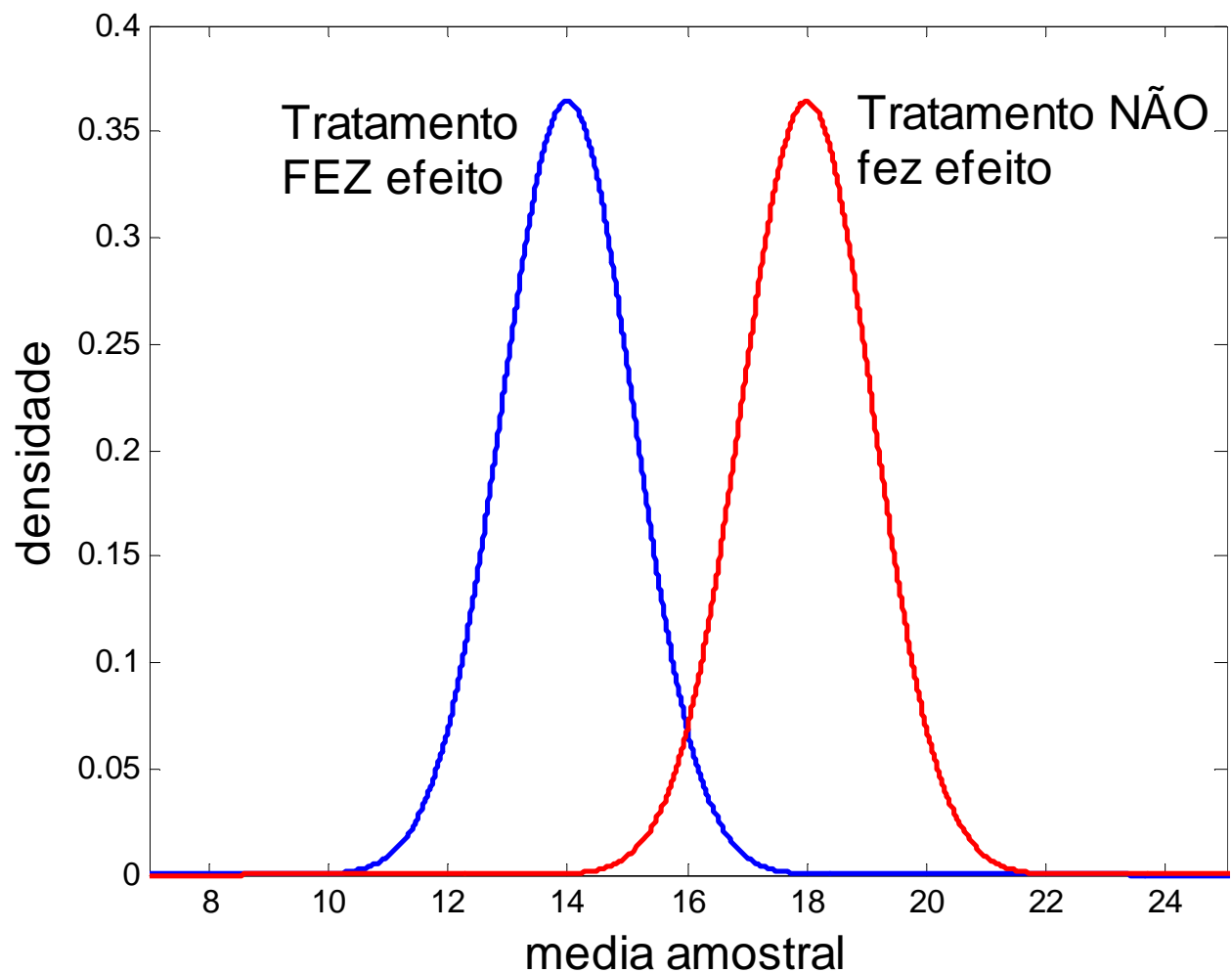
**ou**

$$\beta = P(\text{erro tipo II}) = P(\text{não rejeitar } H_0 \mid H_A \text{ verdadeira})$$

# Representação Gráfica dos erros $\alpha$ e $\beta$



# Aumentando o Tamanho da amostra ( $n=30$ )



---

# Procedimentos para Teste de Hipóteses

- Estabelecer a hipótese nula. A hipótese alternativa é complementar à hipótese nula.
  - Definir a forma da região de aceitação com base na hipótese nula.
  - Identificar uma estatística teste e sua respectiva distribuição.
  - Fixar  $\alpha$  e obter a região de aceitação ou crítica.
  - Concluir o teste com base no resultado amostral.
  - Encontrar o valor-p.
-

---

## Exemplo (c)

- O consumo médio de gasolina num certo tipo de automóvel é de 15 km/litro, segundo informações da montadora. Uma revista especializada verificou o consumo em 25 desses veículos, escolhidos ao acaso e constatou consumo médio amostral de 14,3 km/litro. Admita que o consumo siga o modelo Normal com variância igual a  $9 \text{ (km/litro)}^2$ . Teste ao nível de significância de 5%, a afirmação da montadora de que a média de consumo é igual a 15 km/litro.
-



---

## Exercícios (pg. 281:5)

- O nível de colesterol no sangue é uma variável com distribuição Normal, de média  $\mu$  desconhecida e desvio padrão  $\sigma = 60$  mg/100ml.
  - Teste a hipótese de que  $\mu = 260$  com base em uma amostra de 50 pacientes, em que se observou uma média amostral de 268. Utilize um nível de 5%.
-

- 
- $H_0: \mu = 260 \text{ mg/ 100ml}$

- Região de Aceitação:  $T(x) < c_1$  ou  $T(x) > c_2$

- $$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

- $c_1 = 283,5$  e  $c_2 = 237,5$  para  $\alpha = 0,05$

- Conclusão: não temos evidência contra a hipótese nula.

- Valor-p = 0,49 !!!!!
-

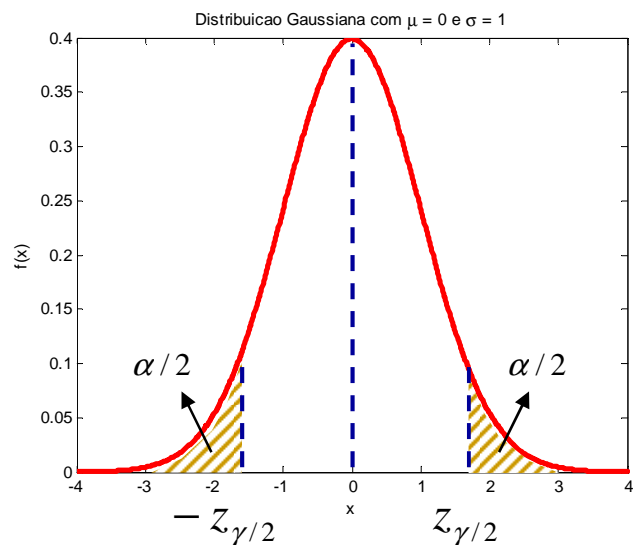
---

# Etapas de um teste de hipóteses

- Estabelecer as hipóteses nula e alternativa
  - Definir a forma da região crítica, com base na hipótese alternativa
  - Identificar a distribuição do estimador e obter sua estimativa
  - Fixar  $\alpha$  e obter a região crítica
  - Concluir o teste com base na estimativa e na região crítica
-

# Alguns Tipos de Testes de Hipótese

## Teste Bilateral



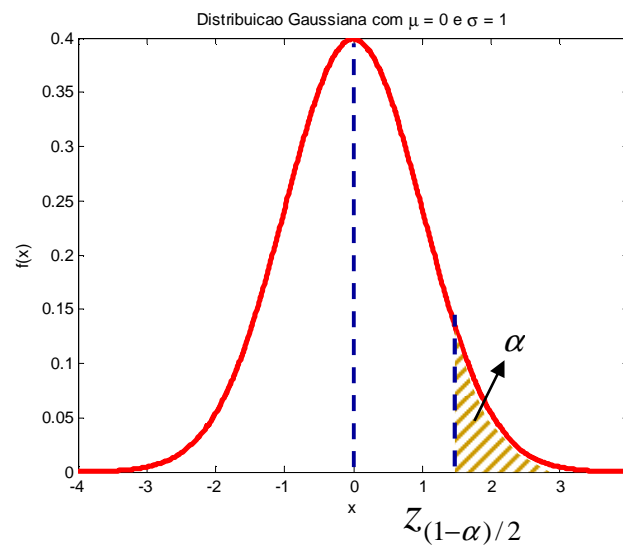
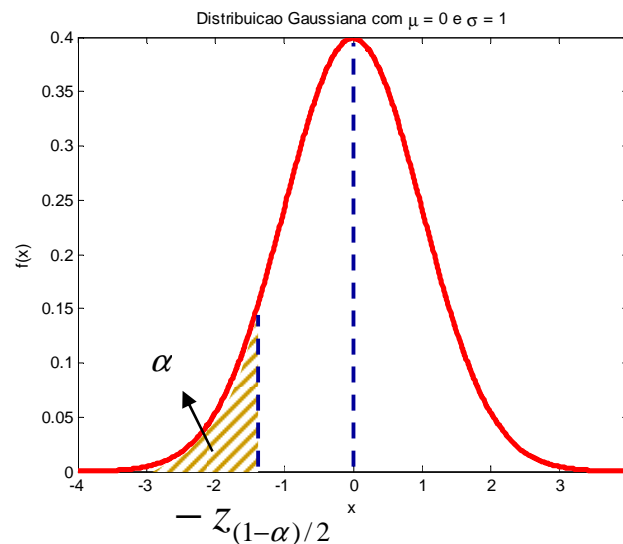
$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_a : \mu \neq \mu_0$$

$$H_0 : \mu \geq \mu_0$$

$$H_a : \mu < \mu_0$$

## Testes Unilaterais

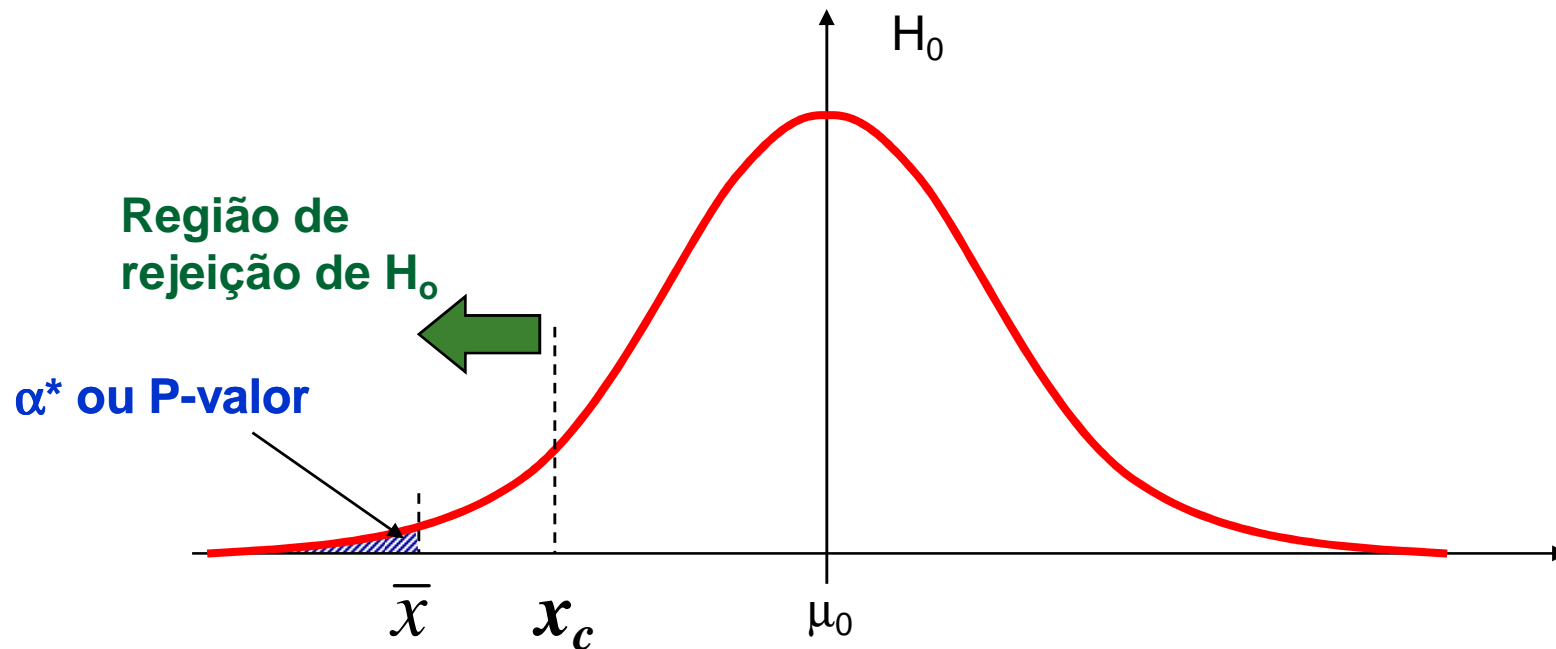


$$H_0 : \mu \leq \mu_0$$

$$H_a : \mu > \mu_0$$

# Nível Descritivo

- Supondo que a hipótese nula seja verdadeira, o nível descritivo (ou P-valor) representa a probabilidade de se obter estimativas mais desfavoráveis ou extremas do que a que está sendo fornecida pela amostra



---

## Exercícios (pg. 281:6)

- Suponhamos que o tempo de cura para um doente tratado pelo método A obedeça a uma distribuição Normal, com média de 7 dias e desvio padrão de 2 dias. Um novo método B é proposto com a finalidade de diminuir o tempo de cura desse tipo de paciente. Em um experimento clínico, 25 pacientes com a doença foram tratados com o método B e observou-se que a média do tempo de restabelecimento para eles foi de 6 dias. Admita que ao utilizar o método B, o tempo de cura tem distribuição Normal com a mesma variância do método A.
    - Identifique as hipóteses adequadas e teste-as, considerando um nível de significância de  $\alpha = 0,02$ .
    - Construa um intervalo de confiança ( $\gamma = 95\%$ ) para a verdadeira média da distribuição do tempo de cura sob o tratamento B.
-

---

## Exercício – pg. 282 : 9

- Um laboratório que fabrica comprimidos analgésicos anuncia que seu remédio contra dor de cabeça leva em média 14 min para aliviar a dor, com desvio-padrão de 5 min. Um médico sustenta que o tempo é diferente e seleciona aleatoriamente 40 pacientes. Pede a eles que tomem tais pílulas quando tiverem dor de cabeça, anotando o tempo (em minutos) até o alívio da dor. Após coletar todas as respostas, ele verifica que o tempo médio de alívio para esses pacientes foi de 19 min. Estes resultados confirmam a afirmação feita pelo laboratório? Faça as suposições necessárias e use  $\alpha = 5\%$ .

---

RC:  $\{x > 15,30\}$ , o laboratório não tem razão.

---

## Exercício pg. 282:8

- Sabe-se que a concentração média de cloro encontrada na urina de recém-nascidos, com gestação de 9 meses, é igual a 210 unidades e que o desvio-padrão correspondente é igual a 20 unidades. Sabe-se também que, em recém nascidos prematuros, a concentração de cloro na urina tem um desvio-padrão igual àquele observado para os outros recém nascidos, porém suspeita-se que a concentração seja diferente. Para testar a veracidade desta suspeita, uma amostra de recém nascidos prematuros será observada com relação às concentrações de cloro na urina (admita que siga o modelo Normal).
    - Formule as hipóteses adequadas.
    - Obtenha o nível descritivo do teste, se a concentração média de cloro observada na urina de uma amostra de 25 prematuros foi de 200 unidades.
-



---

# **Introdução à Bioestatística**

## **Teste de Hipóteses para Média com Variância Desconhecida**

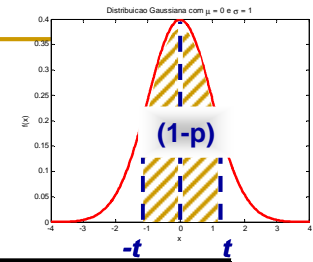
---

# Etapas de um Teste de Hipótese

1. Estabelecer as hipóteses Nula ( $H_0$ ) e Alternativa ( $H_a$ ).
2. Identificar uma estatística teste e sua respectiva distribuição sob a hipótese nula.
3. Fixar  $\alpha$  e obter a região crítica e região de aceitação (em  $H_0$ ).
4. Concluir o teste com base na estimativa e na região crítica.

$$FR(\bar{X}, \alpha) = \left[ \mu_{H_0} \pm t_{\alpha/2, n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right] \text{ ————— } \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \text{ —————}$$

# Tabela t-Student



Distribuição t-Student: Valores de  $t_c$  tais que  $P(-t_c \leq t \leq t_c) = 1-p$

Graus de liberdade

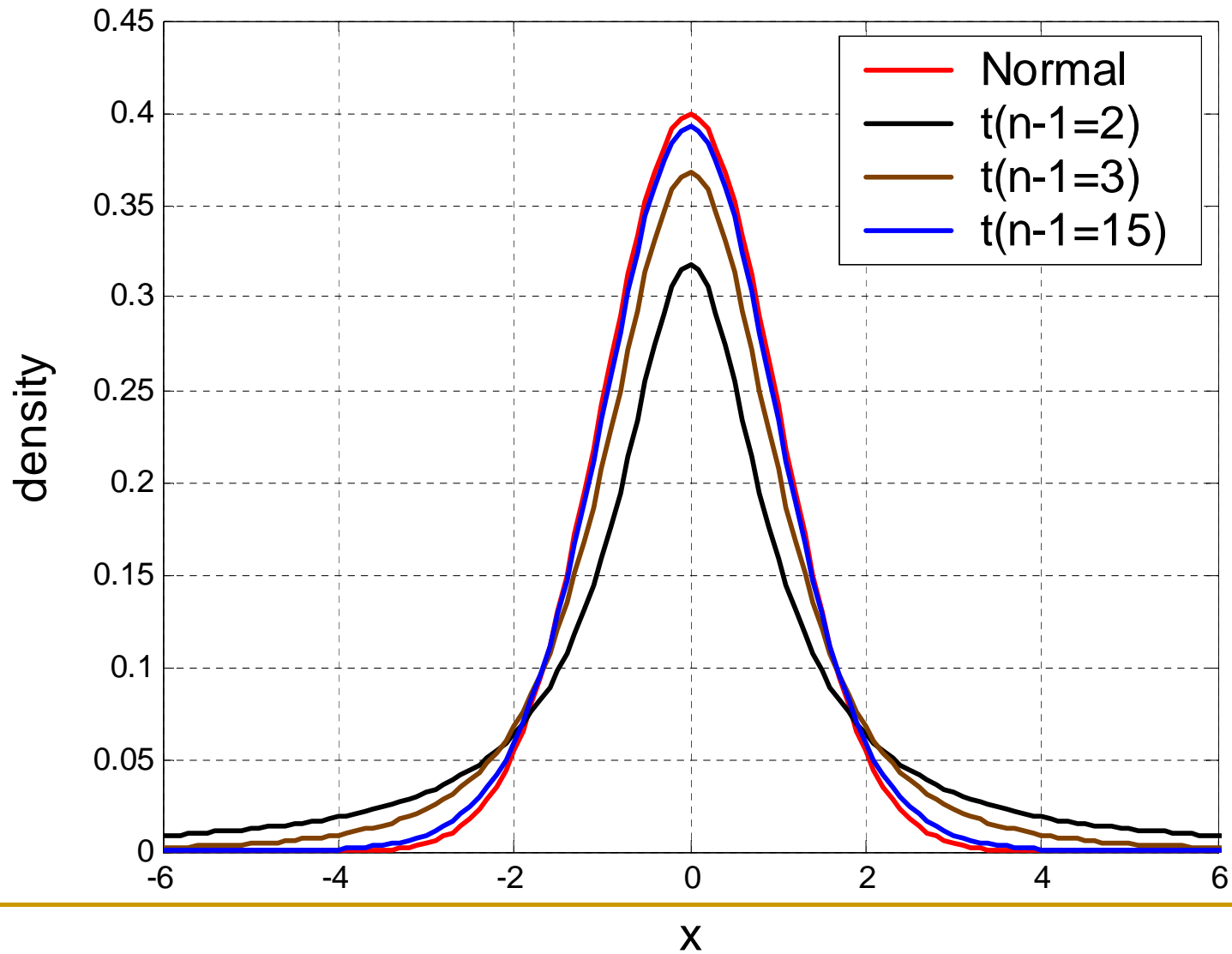
	p->90%	80%	70%	60%	50%	40%	30%	20%	10%	5%	4%	2%	1%	0,2%	0,1%	
1	0.158	0.325	0.510	0.727	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	15.894	31.821	63.656	318.289	636.578	1
2	0.142	0.289	0.445	0.617	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	4.849	6.965	9.925	22.328	31.600	2
3	0.137	0.277	0.424	0.584	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	3.482	4.541	5.841	10.214	12.924	3
4	0.134	0.271	0.414	0.569	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	2.999	3.747	4.604	7.173	8.610	4
5	0.132	0.267	0.408	0.559	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	2.757	3.365	4.032	5.894	6.869	5
6	0.131	0.265	0.404	0.553	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	2.612	3.143	3.707	5.208	5.959	6
7	0.130	0.263	0.402	0.549	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.517	2.998	3.499	4.785	5.408	7
8	0.130	0.262	0.399	0.546	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.449	2.896	3.355	4.501	5.041	8
9	0.129	0.261	0.398	0.543	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.398	2.821	3.250	4.297	4.781	9
10	0.129	0.260	0.397	0.542	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.359	2.764	3.169	4.144	4.587	10
11	0.129	0.260	0.396	0.540	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.328	2.718	3.106	4.025	4.437	11
12	0.128	0.259	0.395	0.539	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.303	2.681	3.055	3.930	4.318	12
13	0.128	0.259	0.394	0.538	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.282	2.650	3.012	3.852	4.221	13
14	0.128	0.258	0.393	0.537	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.264	2.624	2.977	3.787	4.140	14
15	0.128	0.258	0.393	0.536	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.249	2.602	2.947	3.733	4.073	15
16	0.128	0.258	0.392	0.535	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.235	2.583	2.921	3.686	4.015	16
17	0.128	0.257	0.392	0.534	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.224	2.567	2.898	3.646	3.965	17
18	0.127	0.257	0.392	0.534	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.214	2.552	2.878	3.610	3.922	18
19	0.127	0.257	0.391	0.533	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.205	2.539	2.861	3.579	3.883	19
20	0.127	0.257	0.391	0.533	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.197	2.528	2.845	3.552	3.850	20
21	0.127	0.257	0.391	0.532	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.189	2.518	2.831	3.527	3.819	21
22	0.127	0.256	0.390	0.532	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.183	2.508	2.819	3.505	3.792	22
23	0.127	0.256	0.390	0.532	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.177	2.500	2.807	3.485	3.768	23
24	0.127	0.256	0.390	0.531	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.172	2.492	2.797	3.467	3.745	24
25	0.127	0.256	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.167	2.485	2.787	3.450	3.725	25
26	0.127	0.256	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.162	2.479	2.779	3.435	3.707	26
27	0.127	0.256	0.389	0.531	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.158	2.473	2.771	3.421	3.689	27
28	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.154	2.467	2.763	3.408	3.674	28
29	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.150	2.462	2.756	3.396	3.660	29
30	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.147	2.457	2.750	3.385	3.646	30
35	0.127	0.255	0.388	0.529	0.682	0.852	1.052	1.306	1.690	2.030	2.133	2.438	2.724	3.340	3.591	35
40	0.126	0.255	0.388	0.529	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.123	2.423	2.704	3.307	3.551	40
50	0.126	0.255	0.388	0.528	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.109	2.403	2.678	3.261	3.496	50
60	0.126	0.254	0.387	0.527	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.099	2.390	2.660	3.232	3.460	60
120	0.126	0.254	0.386	0.526	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.076	2.358	2.617	3.160	3.373	120
inf	0.126	0.253	0.385	0.524	0.675	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.054	2.327	2.576	3.091	3.291	inf

**TABELA A.4**Percentis da distribuição *t*

<i>gl</i>	Área na Cauda Superior					
	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0005
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,599
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,924
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,768
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
50	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	3,496
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
70	1,294	1,667	1,994	2,381	2,648	3,435
80	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,416
90	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632	3,402
100	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	3,390
110	1,289	1,659	1,982	2,361	2,621	3,381
120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	1,282	1,645	1,960	2,327	2,576	3,291

# Tabela t-Student (Pagano & Gauvreau)

# Distribuição Normal versus $t$



---

## Exemplo 8.5 – pg. 259

- Deseja-se investigar se uma certa moléstia que ataca o rim altera o consumo de oxigênio desse órgão. Para indivíduos sadios, admite-se que esse consumo tem distribuição Normal com média  $12 \text{ cm}^3/\text{min}$ . Os valores medidos em cinco pacientes com a moléstia foram: 14,4; 12,9; 15,0; 13,7 e 13,5 (média = 13,9 e desvio = 0,82). Qual seria a conclusão, ao nível de 1% de significância?
-

---

## Exercício 23 – pg. 286

- O crescimento de bebês, durante o primeiro mês de vida, pode ser modelado pela distribuição Normal. Admita que, em média, um crescimento de 5 cm ou mais seja considerado satisfatório. Deseja-se verificar se o crescimento de bebês de famílias em um bairro da periferia de São Paulo acompanha o padrão esperado. Para tanto, 10 recém-nascidos na região foram sorteados e sua altura acompanhada, fornecendo as seguintes medidas de crescimento em centímetros: 5,03; 5,02; 4,95; 4,96; 5,01; 4,97; 4,90; 4,91; 4,90 e 4,93. (média = 4,958, desvio = 0,049).
-

---

# Princípios de Bioestatística

## Teste de Hipóteses para uma Proporção

---

Enrico A Colosimo

Depto. Estatística – UFMG

<http://www.est.ufmg.br/~enricoc/>



---

# Exemplo

- Um relatório de uma companhia afirma que 40% de toda a água obtida através de poços artesianos no nordeste, é salobra. Há muitas controvérsias sobre essa informação, alguns dizem que a proporção é maior, outros que é menor. Para dirimir as dúvidas, 400 poços foram sorteados e observou-se, em 120 deles, água salobra. Qual seria a conclusão ao nível de 3%?
-

---

# Distribuição da Proporção Amostral

- O melhor estimador para  $p$  é a proporção amostral  $\hat{p}$  cuja distribuição pode ser bem aproximada por um modelo Normal:

$$\hat{p} \sim N\left(\mu = p, \sigma^2 = \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

---

$$RC = \{x \in \mathfrak{R} \mid x < 0,347 \text{ ou } x > 0,453\}$$

---

## Exercício pg. 283:14

- Entre milhares de casos de pneumonia não tratados com sulfa, a porcentagem que desenvolveu complicações foi de 10%. Com o intuito de saber se o emprego das sulfas diminuiria essa porcentagem, 120 casos de pneumonia foram tratados com sulfapiridina e destes, 6 apresentaram complicações. Admitindo que os pacientes são comparáveis em tudo, exceto quanto ao tratamento, teste a hipótese de que a proporção de casos com complicações entre os pacientes tratados com sulfa é significativamente menor do que os não tratados. Calcule o nível descritivo e tome a decisão considerando  $\alpha = 0,05$ .
-

---

## Forma Alternativa: Intervalo de Confiança

- Suponha que se deseje estimar a proporção  $p$  de indivíduos com certa moléstia em uma certa região. Selecionou-se uma amostra aleatória de 100 pessoas e constatou-se que 25 eram portadoras da moléstia.
    - a. Calcule a estimativa pontual da proporção  $p$ .
    - b. Construa um intervalo de confiança para  $p$  com coeficiente de confiança  $\gamma = 0,95$ . Qual o comprimento do intervalo?
    - c. Um pesquisador acredita que a proporção de doentes é diferente de 20%. Teste essa hipótese ao nível  $\alpha = 0,05$ . Formule as hipóteses nula e alternativa.
-