Planejamento de Experimentos
Introdução - Teste t

Enrico A. Colosimo/UFMG
http://www.est.ufmg.br/~enricoc/

Depto. Estatística - ICEx - UFMG

Introdução - Planejamento de Experimentos

- **Experimento**: é um estudo planejado na qual mudanças são realizadas nas variáveis de entrada para observar alterações na resposta.
- **Exemplos**: agronomia, engenharia, etc.
- **Objetivos**: identificar e quantificar fatores que alteram a resposta, estabelecer faixas de referência, reduzir custo e variabilidade, aumentar produtividade, etc.

- Tipos de Estudos
  - **Experimental**: fatorial ou hierárquico (foco da disciplina)
  - Observacional.
- Quantidades Básicas de um Estudo Experimental
  - **Replicação**: unidades submetidas às mesmas condições experimentais;
  - **Aleatorização**: parte fundamental de estudos experimentais: alocação das unidades experimentais é feita de forma aleatória às condições experimentais;
  - **Bloco**: porção mais homogênea do material experimental.

Exemplo 1

- **Situação 1**: A fonoaudióloga Flávia Bezerra de Paula deseja verificar se é possível separar os sons na emissão das vogais "é" e "ê"utilizando os valores da frequência fundamental (Fo) medida em Hz. Para tal, ela alocou de forma aleatória 50 adultos, 25 para a vogal "é"e 25 para a vogal "ê".
- **Perguntas**:
  - Estudo experimental ou observacinal? Porque?
  - Quais são as condições experimentais?
  - Quais são as unidades experimentais?

Comparação de Duas Médias Populacionais (μ_1, μ_2)

- A hipótese nula (H_0) de que as médias populacionais são iguais pode ser escrita da seguinte forma:

  - $H_0 : \mu_1 = \mu_2$
  - $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

  - $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$
  - $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

  Tomando $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$:

  - $H_0 : \mu_D = 0$
  - $H_1 : \mu_D \neq 0$

Teste t: Amostras Independentes, desvios padrões iguais e desconhecidos

- $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ ou $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$ ou $H_0 : \mu_D = 0$
- $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ ou $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ ou $H_1 : \mu_D \neq 0$

Diferença entre Amostras: $\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2$ tal que:
$\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}\right)$

E a estatística teste e sua respectiva distribuição sob H_0:

$$t = \frac{(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)}{\sqrt{s_c^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{\bar{d}}{\sqrt{s_c^2(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

em que

$$
\begin{aligned}
s_c^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(y_{1i} - \bar{y}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(y_{2i} - \bar{y}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2} \\
&= \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}
\end{aligned}
$$

é uma média ponderada das variâncias amostrais.

Exemplo 2

- **Situação 2**: A fonoaudióloga Flávia Bezerra de Paula deseja verificar se é possível separar os sons na emissão das vogais "é" e "ê"utilizando os valores da frequência fundamental (Fo) medida em Hz. Para tal, utilizando 25 adultos, cada um emitiu o som de ambas as vogais.
- **Perguntas**:
  - O que é necessário para este estudo ser experimental?
  - Quais são as condições experimentais?
  - Quais são as unidades experimentais?

Teste t-pareado

- Amostras Pareadas
- Medidas tomadas nos momentos (Y_{1j}) e (Y_{2j}) na mesma j-ésima unidade experimental ou em unidades pareadas.
- Teste reduz ao de uma única amostra, a da diferença entre observações.
- Hipóteses: $H_0 : \mu_D = 0$ vs $H_1 : \mu_D \neq 0$
- Diferença entre Observações: $d_j = Y_{1j} - Y_{2j},\ i = 1, \ldots, n$, tal que:

$$d_i \sim N(\mu_D, \sigma_D^2), \quad s_D^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i - \overline{d})^2}{n-1}$$

E a estatística teste e sua respectiva distribuição sob H_0:

$$t = \frac{\overline{d}}{S_D/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Suposições do Teste t

1. Homocesdasticidade (mesmo desvio-padrão)
    - Como testar? Teste F ou do tipo Bartlett.
    - Qual teste utilizar sob a violação da suposição?
        - Corrigir os graus de liberdade da estatística t (teste de Welch).
        - Testes não-paramétricos: teste de Mann-Whitney (amostras independentes) ou teste do sinal de Wilcoxon (amostras pareadas).
2. Normalidade das populações.
    - Como testar? Shapiro-Wilks, Anderson-Darling, etc usando resíduos.
    - Qual teste utilizar sob a violação da suposição?
        - Amostra grande, teste-t continua válido.
        - Testes não-paramétricos: teste de Mann-Whitney (amostras independentes) ou teste do sinal de Wilcoxon (amostras pareadas).

Amostras Independentes, desvios padrões desconhecidos e diferentes

- $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ ou $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$
- $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ ou $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

Diferença entre médias amostrais: $\bar{d} = \bar{y}_1 - \bar{y}_2$ tal que: $\hat{\sigma}^2_{\bar{d}} = \frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}$

E a estatística teste e sua respectiva distribuição sob H_0:

$$t = \frac{(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \sim t_\nu$$

Obs.: o resultado não é exato (assintótico).

Teste de Welch: Amostras Independentes, desvios padrões desconhecidos e Diferentes

- $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ ou $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$
- $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ ou $H_a : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

em que o número ν de graus de liberdade é dado por:

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

E a Intervalo de Confiança para a diferença de médias ($\mu_1 \neq \mu_2$)

$$IC(\mu_D; 100(1-\alpha)\%) = \bar{d} \pm t_{1-\alpha/2;\nu} \cdot \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

Testes Não-Paramétricos – Mann-Whitney e Sinal de Wilcoxon

- Testes não-paramétricos não assumem suposições de que os dados sejam gerados por alguma família paramétrica de distribuições de probabilidade.
- O teste de Mann-Whitney compara medianas para amostras independentes, enquanto o teste do sinal de Wilcoxon compara mediana das diferenças com o valor zero, para amostras pareadas.
- Tanto o teste de Mann-Whitney quanto o do sinal de Wilcoxon são menos eficientes do que os testes t para duas amostras independentes e o teste t-pareado, respectivamente.
- O primeiro passo de ambos os testes é ordenar todas as observações como se elas fossem de uma única amostra.

Exemplo: Teste Mann-Whitney

Amostra I		Amostra II	
Posto	Valor	Posto	Valor
2	3	1	2
3,5	5	3,5	5
5,5	7	5,5	7
7,5	8	7,5	8
10	9	10	9
10	9	13	15
12	11	14	16
T_1(soma)=50,5		T_2(soma)=54,5	

Exemplo: Teste Mann-Whitney

Estatística de Mann-Whitney é:

$$W = min(W_1, W_2)$$

em que,

$$W_1 = n_1 n_2 + 0,5 n_1(n_1 + 1) - T_1$$

e

$$W_2 = n_1 n_2 + 0,5 n_2(n_2 + 1) - T_2$$

Então temos que $W = min(26,5; 22,5) = 22,5$. Para encontrar o valor-p (aqui, igual a 0,847) necessitamos de uma tabela especifica para este teste ou uma aproximação normal.

Exemplo: Teste do Sinal de Wilcoxon

Usamos o teste do sinal de Wilcoxon quando nossas amostras I e II são pareadas, com tamanho igual a n. Tendo metodologia distinta da do teste Mann-Whitney, possui os seguintes passos:

1. Para $i = 1, \ldots, n$, calcule a diferença absoluta $|x_{\mathrm{II},i} - x_{\mathrm{I},i}|$ e a função sinal $\mathrm{sgn}(x_{\mathrm{II},i} - x_{\mathrm{I},i})$;
2. Exclua todos os pares tais que $\mathrm{sgn}(x_{\mathrm{II},i} - x_{\mathrm{I},i}) = 0$ e denote por n_r o tamanho reduzido das amostras pareadas;
3. Ordene os n_r pares restantes da menor para a maior diferença absoluta e em seguida atribua postos a partir do valor 1. Pares empatados recebem posto igual à média dos postos que teriam se não houvesse o empate;
4. Calcule a soma $W = \sum \mathrm{sgn}(x_{\mathrm{II},i} - x_{\mathrm{I},i}) \cdot R_i, \quad i = 1, \ldots, n_r$.
5. Compare o valor absoluto de W com o da tabela de referência para o teste e decida pela rejeição ou não da hipótese nula.

Exemplo: Teste do Sinal de Wilcoxon

Caso as amostras do exemplo anterior fossem pareadas:

Amostra I	Amostra II	$\lvert X_{\mathrm{II}} - X_{\mathrm{I}} \rvert$	$\mathrm{sgn}(X_{\mathrm{II}} - X_{\mathrm{I}})$	Posto
3	2	1	-1	1
5	5	0	–	–
7	7	0	–	–
8	8	0	–	–
9	9	0	–	–
9	15	6	1	3
11	16	5	1	2
Estatística de teste: $W = (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 4$				

Usando novamente a função *wilcox.test* do R, com o argumento paired=T, obtemos um valor-p igual a 0,4227.

Exemplo 3: Comparação dos Colírios A e B

- Pacientes com pressão intra-ocular elevada irão participar do estudo.
- A pressão será medida após dois meses de uso do colírio.
- O objetivo é comparar a redução média dos dois colírios.

Então, queremos o seguinte:

$$\delta = \mu_A - \mu_B.$$

O interesse é então testar a hipótese:

$$H_0 : \delta = 0$$

- Existem algumas formas de conduzir o estudo:
    - 50 pacientes são submetidos ao colírio A e ao colírio B (pareamento). Considera-se um período de descanso de dois meses entre a aplicação dos colírios. É indicado aleatorizar a ordem de aplicação de A e B.
    - Cem pacientes são selecionados e 50 são sorteados para receber o colírio A e os demais recebem o B.
    - Utilizar o colírio A em um olho e o B, no outro.
- Qual forma você utilizaria?

Amostras Pareada ou Independente?

1. Vantagens de Parear as Amostras
   - Controlar por possíveis fatores de confusão.
   - Menos pacientes.
   - Teste mais preciso com menos suposições.
2. Vantagens de Amostras Independentes
   - dados são obtidos mais rápido.

Quando devemos parear?

SEMPRE (que for possível).

Modelo Estatístico

1. Modelo Estatístico:
$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$$
em que Y_{ij} é o valor da resposta da j-ésima observação no i-ésimo tratamento/grupo; μ é o efeito geral da média; τ_i é o efeito do i-ésimo tratamento e ε_{ij} é o termo de erro.

2. Modelo identificável?

3. Os resíduos são definidos da seguinte forma:
$$\hat{\varepsilon}_{ij} = Y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\tau}_i$$
em que $\hat{\mu}$ e $\hat{\tau}_i$ são os valores estimados pelos dados.

4. Os resíduos são os mesmos, independente da restrição de identificabilidade.