Planejamento de Experimentos
Experimentos Fatoriais

Enrico A. Colosimo/UFMG

Depto. Estatística - ICEx - UFMG

Exemplo: Zarcões de Tinta (Montgomery, 1997)

- Zarcões de tinta para avião são aplicados em superfícies de alumínio através de dois métodos: imersão e aspersão.
- A finalidade do zarcão é melhorar a adesão da tinta, podendo ser aplicado em algumas peças usando qualquer método.
- O grupo de engenharia responsável por essa operação está interessado em saber se 3 diferentes zarcões diferem nas suas propriedades de adesão da tinta.
- Um experimento fatorial foi realizado para investigar o efeito do tipo de zarcão e do método de aplicação na adesão da tinta.

Tabela: Força de adesão de zarcões.

Tipo de Zarcão	Imersão			Aspersão		
1	4	4,5	4,3	5,4	4,9	5,6
2	5,6	4,9	5,4	5,8	6,1	6,3
3	3,8	3,7	4	5,5	5	5

Exemplo: Tempo de vida de baterias (Montgomery, 1997, p.235)

- Um engenheiro está desenvolvendo uma bateria para um dispositivo que estará sujeito a variações extremas de temperatura.
- O único parâmetro que pode ser escolhido nesta fase do projeto é o material da placa da bateria (existem 3 opções de placa).
- Sabendo que o tempo de vida efetivo da bateria é afetado pela variação de temperatura, o engenheiro decide testar (em laboratório) 3 níveis de temperatura (15°F, 70°F e 125°F).
- Quatro baterias são testadas para cada combinação de placa e temperatura.
- O engenheiro está interessado nas seguintes respostas:
    - Quais efeitos do tipo de placa e a temperatura têm sobre o tempo de vida da bateria?
    - Existe uma escolha de material (tipo de placa) que é robusto a variações de temperatura?

Exemplo: Tempo de vida de baterias

Tabela: Tempo de vida de baterias (horas).

Tipo de Material	Temperatura (°F)					
	15		70		125	
1	130	155	34	40	20	70
	74	180	80	75	82	58
2	150	188	136	122	25	70
	159	126	106	115	58	45
3	138	110	174	120	96	104
	168	160	150	139	82	60

Exemplo: Tempo de vida de baterias

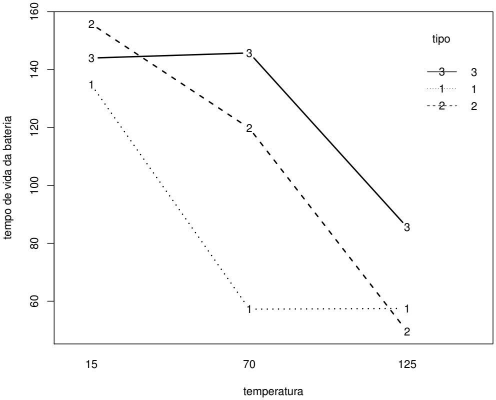

Figura: Tempo médio de vida de baterias (temperatura $\times$ tipo de material).

Entendendo efeito de interação

B	A: 1	A: 2
1	18; 22	39; 41
2	27; 33	51; 51

- $\bar{y}_{11} = 20$, $\bar{y}_{12} = 40$, $\bar{y}_{12} = 30$, $\bar{y}_{22} = 51$.
- $\bar{y}_{1.} = 30$, $\bar{y}_{2.} = 40.5$, $\bar{y}_{.1} = 25$, $\bar{y}_{.2} = 45.5$.

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
A	1	840.50	840.50	120.07	0.0004
B	1	220.50	220.50	31.50	0.0050
A:B	1	0.50	0.50	0.07	0.8025
Residuals	4	28.00	7.00		

Entendendo efeito de interação

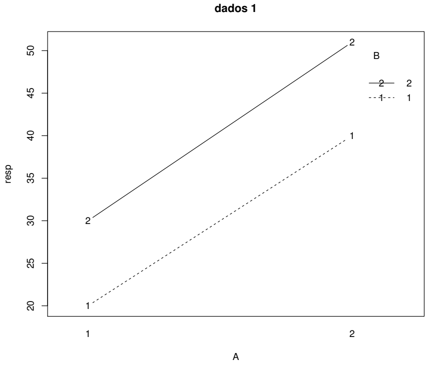

Figura: Resposta média (A × B).

- Diferença entre as médias dos nívies de B não depende o nível de A (demonstrado por duas linhas paralelas).

Entendendo efeito de interação

	A	
B	1	2
1	19; 21	53; 47
2	38; 42	10; 14

- $\bar{y}_{11} = 20$, $\bar{y}_{12} = 50$, $\bar{y}_{21} = 40$, $\bar{y}_{22} = 12$.
- $\bar{y}_{1.} = 35$, $\bar{y}_{2.} = 26$, $\bar{y}_{.1} = 31$, $\bar{y}_{.2} = 31$.

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
A	1	2.00	2.00	0.22	0.6619
B	1	162.00	162.00	18.00	0.0132
A:B	1	1682.00	1682.00	186.89	0.0002
Residuals	4	36.00	9.00		

Entendendo efeito de interação

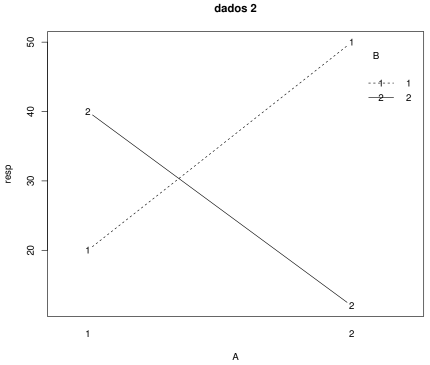

Figura: Resposta média (A $\times$ B).

- Diferença entre as médias dos nívies de B depende o nível de A (demonstrado por duas linhas que se cruzam).

Entendendo efeito de interação

	A	
B	1	2
1	27; 33	69; 67
2	21; 25	38; 42

- $\bar{y}_{11} = 20$, $\bar{y}_{12} = 68$, $\bar{y}_{21} = 23$, $\bar{y}_{22} = 40$.
- $\bar{y}_{1.} = 49$, $\bar{y}_{2.} = 31.5$, $\bar{y}_{.1} = 26.5$, $\bar{y}_{.2} = 54$.

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
A	1	1512.50	1512.50	168.06	0.0002
B	1	612.50	612.50	68.06	0.0012
A:B	1	220.50	220.50	24.50	0.0078
Residuals	4	36.00	9.00		

Entendendo efeito de interação

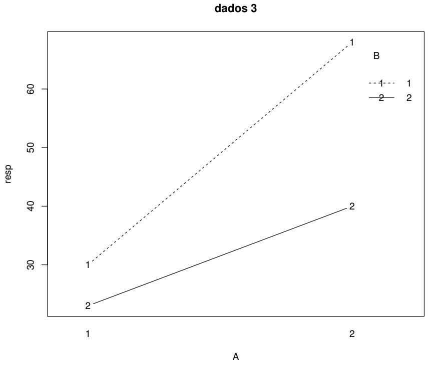

Figura: Resposta média (A $\times$ B).

- Diferença entre as médias de B depende do nível de A. A interacção é dita sinérgica (linhas com inclinações diferentes e mesmo sinal)

Modelo Fatorial (2 fatores)

- O modelo linear para um desenho com dois fatores fixos cruzados é dado por

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \epsilon_{ijk}, \quad \begin{cases} i = 1, ..., a \\ j = 1, ..., b \\ k = 1, ..., n \end{cases},$$

  em que
  - μ é a média geral, comum a todos os tratamentos;
  - τ_i é o efeito do i-ésimo nível do fator A;
  - β_j é o efeito do j-ésimo nível do fator B;
  - $(\tau\beta)_{ij}$ representa o efeito de interação entre τ_i e β_j.
  - ϵ_{ijk} é um componente estocástico associado a variabilidade não explicada pelo modelo, $\epsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2)$;
- Os efeitos de tratamentos (associados a cada fator) são definidos como desvios em relação a média geral, isto é, $\sum_{i=1}^{a} \tau_i = 0$ e $\sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0$.
- Similarmente, os efeitos de interação são fixos e definidos de tal forma que $\sum_{i=1}^{a} (\tau\beta)_{ij} = 0$ e $\sum_{j=1}^{b} (\tau\beta)_{ij} = 0$.

- Em um experimento com dois fatores fixos cruzados, devemos testar primeiramente se existe efeito de interação entre linhas e colunas, isto é,

$$\begin{cases} H_0 : (\tau\beta)_{ij} = 0, \ \ \forall \, (i, j) \\ H_1 : (\tau\beta)_{ij} \neq 0 \text{ para pelo menos um par } (i, j) \end{cases}$$

- Caso não haja efeito de interação, os efeitos de linhas e colunas (ou fatores A e B, respectivamente) são de igual interesse, isto é,

$$\begin{cases} H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_a = 0 \\ H_1 : \tau_i \neq 0 \text{ para pelo menos um i} \end{cases},$$

e a igualdade das colunas, ou seja,

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_b = 0 \\ H_1 : \beta_j \neq 0 \text{ para pelo menos um j} \end{cases},$$

- A soma de quadrados do total é dada por

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk}-\bar{y}_{...})^2 &= bn\sum_{i=1}^{a}(\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{...})^2 + an\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{.j.}-\bar{y}_{...})^2 \\ &+ n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{y}_{ij.}-\bar{y}_{i..}-\bar{y}_{.j.}+\bar{y}_{...})^2 \\ &+ \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk}-\bar{y}_{ij.})^2\end{aligned}$$

- Simbolicamente, temos

$$SQ_{Total} = SQ_A + SQ_B + SQ_{AB} + SQ_E$$

Efeito	A	B	AB	Erro	Total
Graus de Liberdade	$a-1$	$b-1$	$(a-1)(b-1)$	$ab(n-1)$	$abn-1$

- Pode ser mostrado que

$$E(QM_A) = E\left(\frac{SQ_A}{a-1}\right) = \sigma^2 + \frac{bn\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2}{a-1},$$

$$E(QM_B) = E\left(\frac{SQ_B}{b-1}\right) = \sigma^2 + \frac{an\sum_{j=1}^{b}\beta_j^2}{b-1},$$

$$E(QM_{AB}) = E\left(\frac{SQ_{AB}}{(a-1)(b-1)}\right) = \sigma^2 + \frac{n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\tau\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)},$$

e

$$E(QM_E) = E\left(\frac{SQ_E}{ab(n-1)}\right) = \sigma^2.$$

Tabela: ANOVA para um desenho com dois fatores fixos cruzados (dados balanceados).

Fonte de Variação	Soma de Quadrados	Graus de Liberdade	Quadrado Médio	F_0
A	SQ_A	a-1	QM_A	QM_A/QM_E
B	SQ_B	b-1	QM_B	QM_B/QM_E
AB	SQ_{AB}	(a-1)(b-1)	QM_{AB}	QM_{AB}/QM_E
Erro	SQ_E	ab(n-1)	QM_E	
Total	SQ_{Total}	$abn - 1$		

- Note que

$$y_{ijk} = \bar{y}_{...} + (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}) + (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}) + (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}) + (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})$$

- Estimativas dos parâmetros (MQ):
  - $\hat{\tau}_i = \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}$.
  - $\hat{\beta}_j = \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...}$.
  - $\widehat{(\tau\beta)}_{ij} = \bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}$.
- Valores preditos para a combinação (i, j): $\hat{y}_{ijk} = \bar{y}_{ij.}$.
- Resíduos: $e_{ijk} = y_{ijk} - \bar{y}_{ij.}$.
- Resíduos devem ser utilizados para verificar as suposições do modelo.

Exemplo: Tempo de vida de baterias

- As suposições do modelo foram verificadas utilizando os resíduos.
- Existe efeito de interação entre temperatura e tipo de placa.
- As comparações múltiplas devem levar em consideração a interação.
- Ou seja, não podemos comparar tipos de placa isoladamente, nem níveis de temperatura isoladamente.

Exemplo: Tempo de vida de baterias

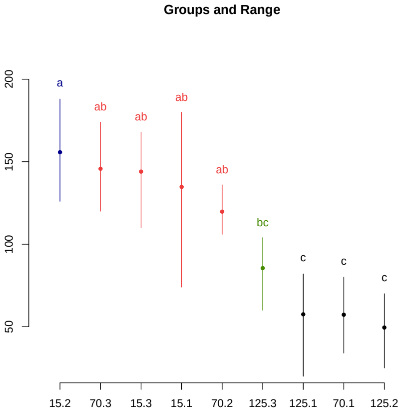

Figura: Comp. Múltiplas (temperatura $\times$ tipo de material).

Exemplo: Tempo de vida de baterias

- Não existe diferença na tempo médio de bateria entre as placas 2 (temp= 15 e 70), placa 3 (temp=15 e 70) e placa 1 (temp=15). Estas são as melhores condições para obter os maiores de tempo de vida.
- A placa 3 (temp=125) é uma condição intermediária, que somente se difere da placa 2 (temp=15)
- Não existe diferença entre as placas 3 (temp=125), placa 2 (temp=125) e placa 1 (temp=70 e 125). Estas são as condições com os menores tempos médios de vida.
- Qual seria a condição indicada para obter o maior tempo de vida da bateria?.

Como testar efeito de interação sem replicações?

- Se $n = 1$ não é possível testar o efeito de interação da forma usual.
- Teste de um grau de liberdade de Tukey.
- O grau de liberdade do erro fica subtraído em uma unidade.

Exemplo: Impureza em um Produto Químico

Tabela: Porcentage de impureza.

Temperatura (°F)	Pressão (Psi)				
	25	30	35	40	45
38	5	4	6	3	5
52	3	1	4	2	3
65	1	1	3	1	2

Exemplo: Impureza em Produto Químico

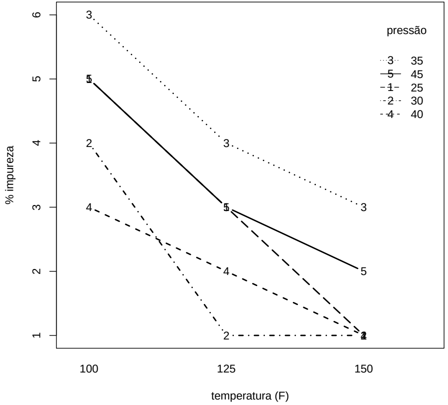

Figura: Gráfico de Interação (temperatura $\times$ pressão).

Teste de um grau de liberdade de Tukey

- O modelo linear para um desenho com dois fatores fixos cruzados é dado por

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \lambda\tau_i\beta_j + \epsilon_{ijk}, \begin{cases} i = 1, ..., a \\ j = 1, ..., b \end{cases},$$

  em que

  - μ é a média geral, comum a todos os tratamentos;
  - τ_i é o efeito do i-ésimo nível do fator A;
  - β_j é o efeito do j-ésimo nível do fator B;
  - λ representa o efeito de interação entre τ_i e β_j.
  - ϵ_{ij} é um componente estocástico associado a variabilidade não explicada pelo modelo, $\epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$;

- Os efeitos de tratamentos (associados a cada fator) são definidos como desvios em relação a média geral, isto é, $\sum_{i=1}^{a} \tau_i = 0$ e $\sum_{j=1}^{b} \beta_j = 0$.

Exemplo: Teste de 1 gl de Tukey

```
>  tukeys.add.test(dados1$Impureza,dados1$Temp,
    dados1$pressao)

Tukey's one df F test for Additivity

data:dados1$Temp and dados1$pressao on dados1$Impureza
F = 0.36269, num df = 1,denom df = 7,p-value = 0.566
sample estimates:
D estimate
0.07389163
```

- A interação não é significativa;
- Podemos utilizar o modelo aditivo.

Análise de Resíduos: Impureza em Produto Químico

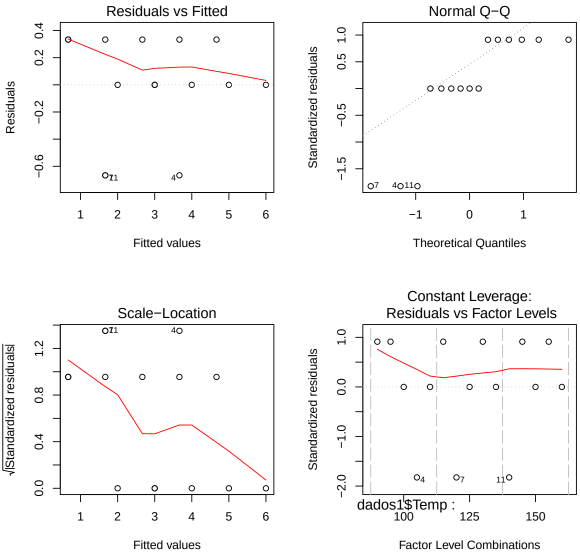

Figura: Gráfico de Interação (temperatura × pressão).

Exemplo: Violação das Suposições

- Violou homocedasticidade.
- Violou normalidade.
- O que fazer?
- Transformação? Tentar logaritmo?

Transformação Log - Temperatura

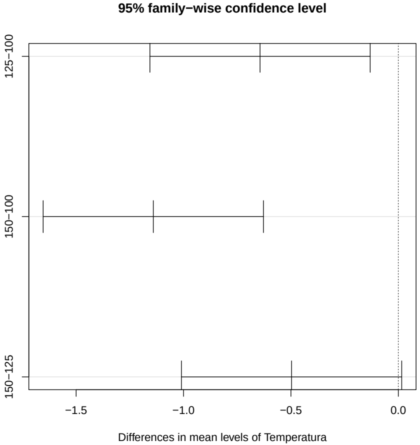

Figura: Comparações Múltiplas.

Transformação Log - Pressão

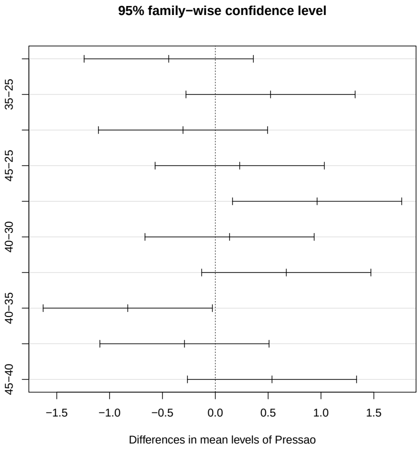

Figura: Comparações Múltiplas.

Conclusões: Impureza Produto Químico

- Usamos a transformação logarítmica. As suposições do modelo foram validadas nesta escala.
- Não houve efeito da interação.
- Existe diferença média da temperatura de 100F com as demais (150 e 125). Não existe diferença entre as temperaturas de 125 e 150F.
- Existe diferença somente entre as pressões de 30 com 35 (Psi) e 40 com 35 (Psi).
- Podemos afirmar que o menor percentual de impureza pode ser obtido com: temperatura de 125 ou 150 e pressões diferentes da de 35.
- A interpretação dos ICs fica comprometida pois $E(\log Y) \neq \log E(Y)$. Ou seja, os ICs são para $E(\log Y)$ e o nosso objetivo é o IC para $E(Y)$.

Delineamentos com mais de dois fatores fixos cruzados

- Os resultados apresentados para um experimento com dois fatores fixos cruzados podem ser generalizados para o caso em que existem a níveis do fator A, b níveis do fator B, c níveis do fator C, e assim por diante.
- Se o experimento é balanceado, então haverá $abc \cdots n$ observações, em que n é o número de réplicas (corridas) do experimento.
- Se todos os fatores envolvidos são fixos, então a formulação e teste de hipóteses de interesse são feitas de maneira usual.
- É necessário termos $n > 1$ para que seja possível testarmos todas os possíveis termos interações.

Delineamentos com três fatores fixos cruzados

- Modelo linear para um experimento com 3 fatores fixos cruzados:

$$y_{ijkl} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_k + (\tau\beta)_{ij} + (\tau\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\tau\beta\gamma)_{ijk} + \epsilon_{ijkl}$$

$$\begin{cases} i = 1, ..., a \\ j = 1, ..., b \\ k = 1, ..., c \\ l = 1, ..., n \end{cases}$$

  - μ é a média geral, comum a todos os tratamentos.
  - τ_i é o efeito do i-ésimo nível do fator A.
  - β_j é o efeito do j-ésimo nível do fator B.
  - γ_k é o efeito do k-ésimo nível do fator C.
  - $(\tau\beta)_{ij}$ representa o efeito de interação entre τ_i e β_j.
  - $(\tau\gamma)_{ik}$ representa o efeito de interação entre τ_i e γ_k.
  - $(\beta\gamma)_{jk}$ representa o efeito de interação entre β_j e γ_k.
  - $(\tau\beta\gamma)_{ijk}$ representa o efeito de interação entre τ_i, β_j e γ_k.
  - ϵ_{ijkl} é um componente estocástico associado a variabilidade não explicada pelo modelo (ϵ_{ijkl} i.i.d. tal que $\epsilon_{ijkl} \sim N(0; \sigma^2)$);

Delineamentos com três fatores fixos cruzados

- Hipóteses de interesse (efeitos de interação):
- Interação de terceira ordem:

$$\begin{cases} H_0 : (\tau\beta\gamma)_{ijk} = 0, \ \ \forall\,(i,j,k) \\ H_1 : (\tau\beta\gamma)_{ijk} \neq 0 \text{ para pelo menos uma tripla } (i,j,k) \end{cases}.$$

- Interações de segunda ordem:

$$\begin{cases} H_0 : (\tau\beta)_{ij} = 0, \ \ \forall\,(i,j) \\ H_1 : (\tau\beta)_{ij} \neq 0 \text{ para pelo menos um par } (i,j) \end{cases},$$

$$\begin{cases} H_0 : (\tau\gamma)_{ik} = 0, \ \ \forall\,(i,k) \\ H_1 : (\tau\gamma)_{ik} \neq 0 \text{ para pelo menos um par } (i,k) \end{cases},$$

$$\begin{cases} H_0 : (\beta\gamma)_{jk} = 0, \ \ \forall\,(j,k) \\ H_1 : (\beta\gamma)_{jk} \neq 0 \text{ para pelo menos um par } (j,k) \end{cases},$$

- Hipóteses de interesse (fatores principais): somente considera-los se não houver efeito de interação.

$$\begin{cases} H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_a = 0 \\ H_1 : \tau_i \neq 0 \text{ para pelo menos um i} \end{cases},$$

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_b = 0 \\ H_1 : \beta_j \neq 0 \text{ para pelo menos um j} \end{cases},$$

$$\begin{cases} H_0 : \gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_c = 0 \\ H_1 : \gamma_k \neq 0 \text{ para pelo menos um k} \end{cases},$$

Delineamentos com três fatores fixos cruzados

Tabela: ANOVA para um desenho com 3 fatores fixos cruzados (dados balanceados).

Fonte de Variação	Soma de Quadrados	Graus de Liberdade	Quadrado Médio	F_0
A	SQ_A	a-1	QM_A	QM_A/QM_E
B	SQ_B	b-1	QM_B	$QM_B\ /QM_E$
C	SQ_C	c-1	QM_C	$QM_C\ /QM_E$
AB	SQ_{AB}	(a-1)(b-1)	QM_{AB}	QM_{AB}/QM_E
AC	SQ_{AC}	(a-1)(c-1)	QM_{AC}	QM_{AC}/QM_E
BC	SQ_{BC}	(b-1)(c-1)	QM_{BC}	QM_{BC}/QM_E
ABC	SQ_{ABC}	(a-1)(b-1)(c-1)	QM_{ABC}	QM_{ABC}/QM_E
Erro	SQ_E	abc(n-1)	QM_E	
Total	SQ_{Total}	$abcn-1$		

Exemplo: Engarrafadora de refrigerantes

- Uma engarrafadora de refrigerantes está interessada em obter um processo de enchimento mais uniforme das garrafas em sua linha de produção.
- Um experimento é conduzido para estudar três fatores do processo, a saber:
  - Carbonatação (A): 10, 12, 14 (%).
  - Pressão de operação (B): 25, 30 (psi).
  - Velocidade da linha (C): 200, 250 (bpm).
- A resposta é o desvio a partir da altura nominal de enchimento (mm).
- Cada combinação dos três fatores tem duas replicações e todas as 24 corridas foram realizadas em uma ordem aleatória.

Exemplo: Engarrafadora de refrigerantes

Tabela: Desvio do valor nominal (mm).

	Pressão (B)			
	25 psi		30 psi	
	Velocidade (C)		Velocidade (C)	
Carbonatação (A)	200	250	200	250
10	-3;-1	-1;0	-1;0	1;1
12	0;1	2;1	2; 3	6;5
14	5;4	7;6	7; 9	10;11

Exemplo: Interação - Pressão e Carbonatação

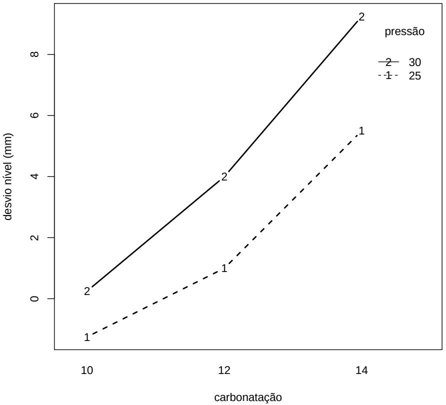

Figura: : Interação Pressão Carbonatação.

Pressão e Carbonatação

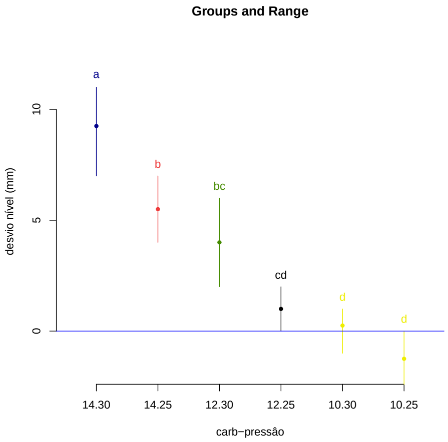

Figura: : Comparação Múltipla: Pressão Carbonatação.

Velocidade

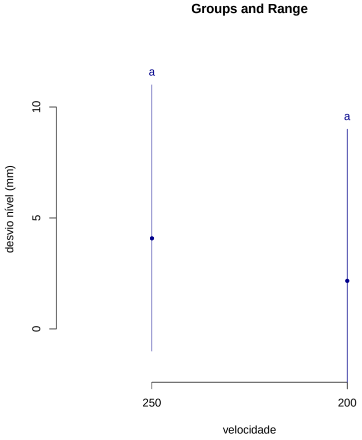

Figura: : Efeito de Velocidade.

Modelo sem Interação de terceira ordem

- Modelo é adequado.
- Existe interação entre carbonatação e pressão.
- O fator velocidade pode ser analisado separadamente.
- As combinações (carbonatação-pressão): 12-25, 10-30 e 10-25 não se diferem (diferem das demais) e estão próximas do alvo do fabricante.

Variações do Experimento com fatores fixos cruzados

- O experimento fatorial com dois ou mais fatores pode ser realizado em bloco. O bloco faz com que a SQ_E fique menor pois o fatorial é realizado em condições mais homogêneas.
- Todo o fatorial (dois ou mais fatores) deve ser corrido em cada nível do bloco. Portanto, a aleatorização é realizada intra nível do bloco.
- O modelo pode ser misto, efeitos fixos e aleatórios. Isto vai de encontro aos objetivos do estudo.
- Da mesma forma que no caso de um único fator, a hipótese envolvendo o efeito aleatório é $\sigma_k^2 = 0$ e não requer comparações múltiplas.
- O termo de interação, entre um fator fixo e outro aleatório, é aleatório, e deve ser interpretado com o devido cuidado.

Delineamentos fatoriais 2^k fracionados

- Delineamentos fatoriais são amplamente utilizados em experimentos envolvendo vários fatores.
- Um delineamento do tipo 2^k fatorial é um caso particular do delineamento fatorial geral bastante importante e utilizado na prática, especialmente em engenharia. 2^k significa que são k fatores, todos com dois níveis.
- Quando o número de fatores cresce, o número de provas aumenta rapidamente, o que pode inviabilizar sua execução.
- Os experimentos fatoriais fracionados surgem para atender a esta demanda.
- Fracionado significa que nem mesmo uma rodada completa é realizada no estudo.

Delineamentos fatoriais 2^k fracionados

- Por exemplo, uma réplica de um plano 2^6, requer 64 provas;
  - Apenas 6 dos 63 gl correspondem aos efeitos principais;
  - 15 dos gl correspondem às interações de segunda ordem;
  - Os 42 gl restantes correspondem às interações de terceira e ordem superior.
- Outro exemplo, uma réplica de um plano 2^8, requer 256 provas;

Delineamentos fatoriais 2^k fracionados

- Uma forma de tratar estes estudos é ignorar as interações de mais alta ordem;
- Por exemplo, em um plano 2^8, que requer 256 provas; podemos considerar somente efeitos principais e interações de segunda e terceira ordem. Desta forma, vamos precisar de 8 + 28 + 56 = 92 corridas. Que ainda é muito!!!
- Os fatoriais fracionados estão entre os planos mais executados, principalmente em ambientes industriais.

Delineamentos fatoriais 2^k fracionados

- Uma das principais utilidades dos planos fatoriais fracionados são experimentos de triagem (screening).
- Vários fatores são executados simultaneamente e o objetivo é identificar os efeitos presentes.
- Identificado os efeitos importantes, experimentos fatoriais são rodados em seguida.

Delineamentos fatoriais 2^k fracionados

- No experimento fatorial fracionado somente uma fração das possíveis corridas é executada.
- Por exemplo, o experimento 2^{8-2}, significa que existem 8 fatores e serão executados 64 provas ao invés do fatorial completo com 256.
- Executando somente uma fração das corridas, alguns efeitos ficarão confundidos.
- Quando os efeitos estão confundidos, não podemos diferenciá-los.
- Pergunta: qual fração utilizar?
- O procedimento usual consiste em construir o fatorial completo e utilizar a interação de maior ordem para gerar a fração.