Sistemas Reparáveis - Processo de Contagem

Enrico A. Colosimo

Colaboração: Rodrigo C. P. dos Reis e Maria Luiza Toledo

Programa de Pós-Graduação em Estatística - UFMG

Teoria básica de Processos de Contagem

- Um processo contagem é um modelo estocástico que descreve a ocorrência de eventos no tempo.
- Essas ocorrências sao descritas como pontos no eixo do tempo.
- Nesses estudos, essas "ocorrências no tempo"são os tempos de falha de um sistema reparável.

Notação e Conceitos Básicos

- Denotaremos os tempos de falha de um sistema medido em **tempo global** por $0 < T_1 < T_2 < \ldots$, ou seja, o tempo desde a inicialização do sistema.
- Os tempos entre falhas, ou os *gaps*, são denotados por $X_1, X_2, \ldots$.

Notação e Conceitos Básicos

- Denotaremos os tempos de falha de um sistema medido em **tempo global** por $0 < T_1 < T_2 < \ldots$, ou seja, o tempo desde a inicialização do sistema.
- Os tempos entre falhas, ou os *gaps*, são denotados por $X_1, X_2, \ldots$.
  - Com esta formulação, temos

$$
\begin{aligned}
X_1 &= T_1 \\
X_2 &= T_2 - T_1 \\
X_3 &= T_3 - T_2 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Teoria Básica de Processos de Contagem

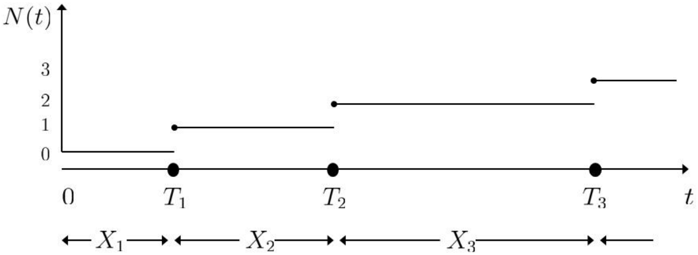
Definição: Variável aleatória de contagem

- Seja $N(t)$ a variável aleatória que denota o número de falhas no intervalo $[0, t]$, e $N(a, b]$ o número de falhas no intervalo $(a, b]$.

$$N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} I(T_k \leq t)$$

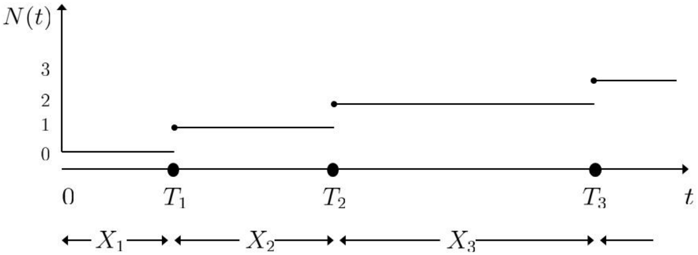
- N é chamada *variável aleatória de contagem*.

Teoria Básica de Processos de Contagem



Observe que o processo de contagem é contínuo à direita.

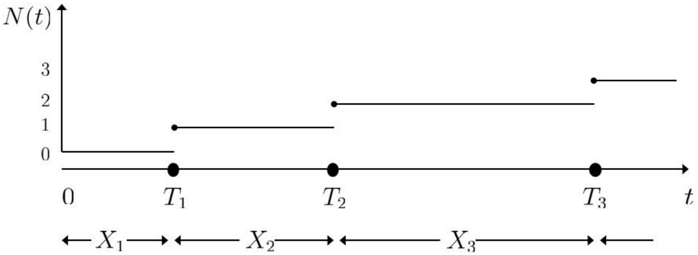
Teoria Básica de Processos de Contagem



Observe que o processo de contagem é contínuo à direita.

Métodos alternativos de especificar o modelo do processo de contagem são:

Teoria Básica de Processos de Contagem

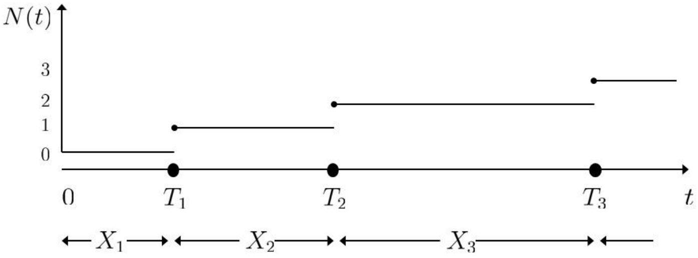


Observe que o processo de contagem é contínuo à direita.

Métodos alternativos de especificar o modelo do processo de contagem são:

- Fornecer a **função densidade de probabilidade conjunta** dos tempos de falha $0 < T_1 < T_2 < \ldots < T_n$.

Teoria Básica de Processos de Contagem



Observe que o processo de contagem é contínuo à direita.

Métodos alternativos de especificar o modelo do processo de contagem são:

- Fornecer a **função densidade de probabilidade conjunta** dos tempos de falha $0 < T_1 < T_2 < \ldots < T_n$.
- Fornecer a **função densidade de probabilidade conjunta** dos tempos entre falhas $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Teoria Básica de Processos de Contagem

Definição: Função média de um processo pontual

- A *função média de um processo pontual* é definida como sendo a esperança:

$$\Lambda(t) = E(N(t)) \tag{1}$$

- Assim, $\Lambda(t)$ é o número esperado de falhas até o tempo t (função não-decrescente).

Teoria Básica de Processos de Contagem

Definição: Função de Intensidade Completa

- $$\lambda(t/H_t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(N(t, t + \Delta t) = 1/H_t)}{\Delta t},$$
  em que $H_t = \{N(s) : 0 \leq s < t\}$ é a história do processo.
- λ pode ser interpretada como a taxa instantânea de mudança no número esperado de falhas.

Processo de Contagem

Definição: Incrementos independentes

- Um *processo pontual* tem incrementos independentes se $\forall n$ e $\forall \quad r_1 < s_1 \leq r_2 < s_2 \leq \ldots \leq r_n < s_n$, as v.a.'s $N(r_1, s_1], N(r_2, s_2], \ldots, N(r_n, s_n]$ são independentes. Em outras palavras:

$$P(N(r_1, s_1] = k_1, \ldots, N(r_n, s_n] = k_n) = \prod_{i=1}^{n} P(N(r_i, s_i] = k_i)$$

- a história do processo H_t não afeta a falha instânea em t.

Teoria Básica de Processos de Contagem

Definição: Função intensidade (incrementos independentes)

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(N(t, t + \Delta t] = 1)}{\Delta t} \tag{2}$$

A função intensidade é a probabilidade de falha em um intervalo pequeno dividida pelo tamanho do intervalo.

Visão geral de modelos

- Um modelo probabilístico ou estatístico para um sistema reparável deve descrever a ocorrência de eventos no tempo.
- **Suposiçoes em relaçao a forma com que o sistema envelhece, sobre o efeito dos reparos, vão influenciar a escolha do modelo.**

Visão geral de modelos

Definição: Reparo mínimo

- O reparo feito no sistema faz com que ele retorne a mesma condição que estava imediatamente antes da ocorrência da falha ("tão ruim quanto velho").
- A suposição de reparo mínimo leva ao processo de Poisson nao-homogêneo (NHPP).

Visão geral de modelos

Definição: Reparo perfeito (ou de renovação)

- O reparo faz com que o sistema retorne a condição de novo ("tão bom quanto novo").
- Se todos os reparos sao perfeitos, entao os tempos entre as falhas são i.i.d. (processo de renovação)
- Um caso particular é o processo de Poisson homogêneo (Xi's $\sim$ exponencial)

O Processo de Poisson

Definição:

- Uma v.a. X segue uma distribuiçao Poisson se é uma v.a. discreta com fdp:

$$p(x) = P(X = x) = \frac{\phi^x exp(-\phi)}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Teorema:

- Se X $\sim$ Poisson(ϕ), entao $E(X) = \phi$ e $Var(X) = \phi$.

O Processo de Poisson

Definição: Processo de Poisson

Um processo de contagem $N(t)$ é um *processo de Poisson* se:

1. $N(0) = 0$
2. Para qualquer $a < b \leq c < d$ as v.a.'s $N(a, b]$ e $N(c, d]$ são independentes (propriedade dos incrementos independentes)

O Processo de Poisson

Definição: Processo de Poisson

Um processo de contagem $N(t)$ é um *processo de Poisson* se:

3. Existe uma função λ tal que

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(N(t, t+\Delta t] = 1)}{\Delta t}$$

   $\lambda(t)$ é a função intensidade do processo de Poisson.

4. $$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(N(t, t+\Delta t] \geq 2)}{\Delta t} = 0$$

   A probabilidade de falhas simultâneas é zero.

O Processo de Poisson

Teorema:

- As propriedades (1) a (4) implicam que:

$$P(N(t)=n)=\frac{1}{n!}\left(\int_0^t \lambda(x)dx\right)^n exp\left(-\int_0^t \lambda(x)dx\right), n=0,1,2,\ldots$$

- Ou seja, $N(t) \sim \text{Poisson}\left(\int_0^t \lambda(x)dx\right)$.

O Processo de Poisson

Corolário:

- Para um processo de Poisson, a v.a. $N(a, b]$ tem uma distribuição Poisson com média:

$$\int_a^b \lambda(x)dx$$

- Ou seja, $N(a, b] \sim \text{Poisson}\left(\int_a^b \lambda(x)dx\right)$.

O Processo de Poisson

Teorema:
Um processo de contagem $N(t)$ é um processo de Poisson see:

1. $N(0) = 0$,
2. O processo tem a propriedade de incrementos independentes, e
3. Para qualquer $a < b$, $N(a, b] \sim Poisson\left(\int_a^b \lambda(x)dx\right)$.

O Processo de Poisson Homogêneo

Definição: Processo de Poisson Homogêneo

- O processo de Poisson homogêneo (HPP) é um processo de Poisson com função intensidade constante $\lambda(t) = \lambda$.
- Como a função intensidade é constante, o HPP nao pode ser usado para modelar sistemas em deterioração ou melhoria.

O Processo de Poisson Homogêneo

Teorema:

- Um processo é um HPP com função intensidade λ, see os tempos entre as falhas (Xi's) são v.a.'s i.i.d exponencial com média $1/\lambda$.

O Processo de Poisson Homogêneo

Fato:

- Para um HPP, $T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, em que $X_i's$ i.i.d. $\sim Exp(1/\lambda)$.

Corolário:

- $T_n \sim \text{Gama}(n, 1/\lambda)$.

O Processo de Poisson Não-Homogêneo

Definiçao: Processo de Poisson não-homogêneo:

- O processo de Poisson não-homogêneo (NHPP) é um processo de Poisson cuja função intensidade **não** é constante.
- Quando a função intensidade tem a forma $\lambda(t) = (\beta/\theta)(t/\theta)^{\beta-1}$, onde $\beta > 0$ e $\theta > 0$, o processo é chamado de **processo lei de potência**.

Processo de Renovação

Definição: Processo de Renovação

- Se os tempos entre as falhas $X_1, X_2, \ldots$ são iid, entao diz-se que o processo de falha é um *processo de renovação*.
- A v.a. discreta $N(t)$ é definida como o número de falhas no intervalo $[0, t]$. Ela satisfaz:

$$P(N(t) \geq k) = P(T_k \leq t) = P(\sum_{i=1}^{k} X_k \leq t) = F^{(k)}(t), \tag{3}$$

onde $F^{(k)}(t)$ é a fda da convolução de densidades f.

Processo de Renovação

- A função intensidade completa,

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(N(t, t + \Delta t) = 1/H_t)}{\Delta t},$$

depende da história H_t do processo apenas a partir de x, o tempo desde a falha mais recente.

Processo de Renovação

- A função intensidade completa abaixo é condicionada as falhas ocorrendo nos tempos $t = 2; 4,5; 8,5; 10,5; 13$ e 15.

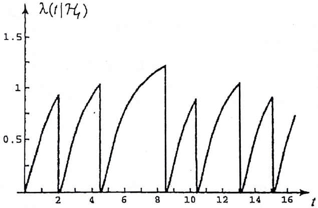


Fig. 3.1 Complete intensity function, conditioned on failures at times $t = 2$, 4.5, 8.5, 10.5, 13, and 15.

Processo de Renovação

- A **função média** para um processo de renovação é então:

$$
\begin{aligned}
\Lambda(t) &= E(N(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} kP(N(t) = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k[P(N(t) \geq k) - P(N(t) \geq k+1)] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P(N(t) \geq k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} F^{(k)}(t)
\end{aligned}
$$

Processo de Renovação

Exemplo:

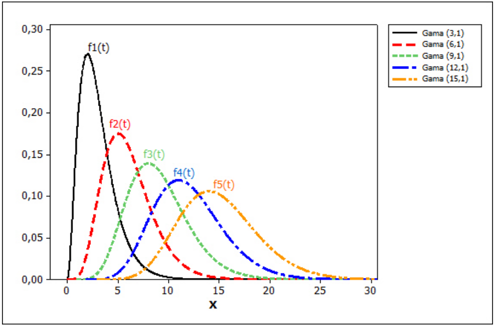
- Suponha que os tempos entre falhas sejam iid $\text{GAM}(3, \theta)$.
- Logo, $T_n \sim \text{GAM}(3n, \theta)$.
- E portanto:

$$\lambda(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{3k-1}}{\theta^{3k}\Gamma(3k)} e^{-t/\theta}.$$

Processo de Renovação

Exemplo:

- Assumindo $\theta = 1$, temos $X_i's \sim Gama(3,1)$.
- Logo, $T_k \sim Gama(3k, 1)$
- As fdp para os cinco primeiros tempos de falha $(T_1, T_2, \ldots, T_5)$ são dadas por:



Processo de Renovação

Exemplo:

- A λ é portanto:

$$\mu(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{3k-1}}{\Gamma(3k)} e^{-t}.$$

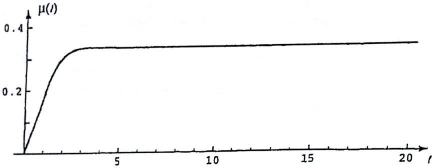


Fig. 3.3 ROCOF function for a GAM(3, 1) renewal process.

Processo de Renovação

Exemplo:

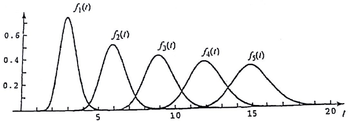


Fig. 3.4 Probability density functions for first five failures from a GAM(30, 0.1) renewal process.

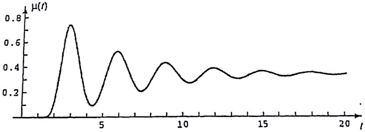


Fig. 3.5 ROCOF function for a GAM(30, 0.1) renewal process.

As fig. 3.3 e 3.5 sugerem que a λ (ou densidade de renovação) converge para $1/\eta = 1/E(X_i) = 1/3$.

Processo de Renovação

Teorema:

- Para um processo de renovação $X_1, X_2, \ldots$, com $\eta = E(X_i)$ e $\sigma^2 = V(X_i)$,
  1. $\lim_{t \to \infty} \frac{\Lambda(t)}{t} = \frac{1}{\eta}$
  2. $\lim_{t \to \infty} \mu(t) = \frac{1}{\eta}$

Processo de Renovação

Teorema:

- Para um processo de renovação em que os tempos entre os eventos têm média η e variância σ^2,

$$\lim_{t\to\infty} P(N(t) < a(t)) = \Phi(y),$$

onde $a(t) = t/\eta + y\sigma\sqrt{t/\eta^3}$ e Φ é a fda da $N(0,1)$.

Processo de Renovação

Exemplo:

- Em uma copiadora, a demanda de alguns dias é maior que a de outros. Assim, os tempos de vida X dos toners variam entre si.
- A distribuição da vida do toner, medida em dias, é Weibull $(6, 16)$, ou seja, $X_i's \sim$ iid Weibull$(6, 16)$.
- Qual é a probabilidade de que um pedido de 25 toners dure pelo menos um ano inteiro?

Processo de Renovação

Exemplo:

- A probabilidade desejada, com uma correção de continuidade, é:

$$P(N(365) \leq 25) = P(N(365) < 25,5)$$

- O tempo de vida esperado até a falha e a variância do tempo de falha são, respectivamente,

$$\eta = \theta\Gamma(1 + 1/\beta) = 16\Gamma(7/6) \approx 14,84$$

$$\sigma^2 = \theta^2[\Gamma(1+2/\beta) - (\Gamma(1+1/\beta))^2] = 16^2[\Gamma(4/3) - (\Gamma(7/6))^2 \approx 8,273$$

Processo de Renovação

Exemplo:

- O valor de $a(365)$ satisfaz:

$$25,5 = a(365) = \frac{365}{\eta} + y\sigma\sqrt{\frac{365}{\eta^3}}$$

Resolvendo para y temos:

$$y = \frac{25,5 - 365/\eta}{\sigma\sqrt{365/\eta^3}} \approx \frac{25,5 - 365/14,84}{\sqrt{8,273}\sqrt{365/14,84^3}} \approx 0,947$$

Aplicando o Teorema temos:

$$P(N(365) \leq 25,5) \approx \Phi(y) \approx \Phi(0,947) \approx 0,83.$$

Piecewise Exponential Model - PEXP

- Se $X_i's \sim$ idd Exponencial, temos o HPP.
- Se relaxarmos a suposição de tempos entre falhas *identicamente* distribuídos, e permitirmos que os tempos entre falhas tenham diferentes distribuições (embora possivelmente na mesma família de distribuições), podemos obter um modelo útil para sistemas reparáveis.

Piecewise Exponential Model - PEXP

- O modelo PEXP assume que os tempos entre falhas $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são v.a.'s independentes com distribuição exponencial com

$$E(X_i) = \frac{\delta}{\mu} i^{\delta - 1}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

  onde $\delta > 0$ e $\mu > 0$.
- Quando $\delta = 1$, temos o caso iid exponencial.
- Quando $\delta > 1$, entao $E(X_i)$ é uma função crescente de i; corresponde a melhoria da confiabilidade.
- Quando $\delta < 1$, entao $E(X_i)$ é uma função decrescente de i; corresponde a deterioração da confiabilidade.

Piecewise Exponential Model - PEXP

O modelo PEXP difere do NHPP devido a:

- O PEXP assume que a confiabilidade do sistema permanece inalterada entre as falhas, e que ela dá um salto no momento de uma falha.
- O NHPP assume que a confiabilidade do sistema muda *continuamente* a medida que o sistema envelhece, e que ela permanece inalterada no momento de uma falha.
- No caso de melhoria da confiabilidade, em que as melhorias sao feitas a cada vez que um protótipo do sistema falha, o modelo PEXP pode ser mais apropriado que o NHPP.

Imperfect Repair Models

- Brown e Proschan (1983) sugeriram um modelo no qual uma unidade que falhou é reparada a uma condição de "tão boa quanto nova"ou a uma condição de "tão ruim quanto velha".
- Esses tipos de reparo (perfeito e mínimo, respectivamente) são chamados entao de modelo de reparo imperfeito de Brown e Proschan (BP).
- Sob esse modelo, uma unidade que falhou é submetida a um reparo perfeito com probabilidade p e a um reparo imperfeito com probabilidade $q = 1 - p$.
- Como casos especiais, se $p = 0$, então temos um NHPP e se $p = 1$ temos um processo de renovação.

Imperfect Repair Models

- Seja $F(t)$ a fda da distribuição do tempo de falha após um reparo perfeito, e $r(t)$ a função de taxa de falha correspondente.
- A função de taxa de falha para o tempo até o reparo perfeito é então

$$
\begin{aligned}
r_{Perfeito}(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t < T \leq t + \Delta t / T > t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} P(\text{uma falha ocorre em}(t, t + \Delta t]\& \\
&\quad \& \text{ o reparo é perfeito}) \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} P(\text{uma falha ocorre em}(t, t + \Delta t] \\
&\quad x P(\text{reparo perfeito}/\text{falha ocorre em}(t, t + \Delta t]) \\
&= pr(t).
\end{aligned}
$$

Imperfect Repair Models

- Aqui, T representa o tempo até o primeiro reparo perfeito. Similarmente, a função de sobrevivência para o tempo até o primeiro reparo perfeito é:

$$
\begin{aligned}
\overline{F}_{Perfeito}(t) &= P(T > t) = exp\left[-\int_0^t r_{Perfeito}(x)dx\right] \\
&= exp\left[-p\int_0^t r(x)dx\right] \\
&= [\overline{F}(t)]^p.
\end{aligned}
$$

Imperfect Repair Models

- Brown and Proschan também mostraram que a ROCOF $\mu(t)$ para o modelo de reparo imperfeito BP satisfaz

$$\mu(t) = \frac{1}{p}\mu_{Perfeito}(t),$$

onde $\mu_{Perfeito}$ é a ROCOF da funçao de renovação para o processo de reparos perfeitos.

Imperfect Repair Models

- O modelo Block, Borges e Savits (BBS model) é uma extensão do modelo de reparo imperfeito BP que permite que a probabilidade de reparo perfeito seja dependente do tempo.
- Eles supõem que uma unidade que falhou é submetida a um reparo perfeito com probabilidade $p(t)$, onde t é o tempo desde o reparo perfeito mais recente, e a um reparo imperfeito com probabilidade $q(t) = 1 - p(t)$.
- Seja F a fda do tempo até a primeira falha. Eles mostraram que os reparos perfeitos formam um processo de renovação com fda:

$$F_{Perfeito}(t) = exp\left[-\int_0^t p(x)\overline{F}^{-1}(x)F'(x)dx\right].$$