Sistemas Reparáveis - Técnicas Paramétricas

Enrico A. Colosimo

Colaboração: Gustavo Gilardoni, Maria Luíza Toledo e Rodrigo Reis

Programa de Pós-Graduação em Estatística - UFMG

Sistemas Reparáveis

- Objetivo do Estudo: verificar tendência do(s) sistema(s), tempo ótimo de MP, etc.
- REPARO MíNIMO: voltar a condição de "tão ruim quanto velho".
- Processo de Renovação: voltar a condição de "tão bom quanto novo".

Verificação de Tendência do Sistema

- Melhorar: tempos entre falhas estão aumentando ao longo do acompanhamento.
- Estável: sem tendência (Processo de Poisson Homogêneo).
- Piorando: tempos entre falhas estão diminuindo ao longo do acompanhamento.
- Combinação de condições!!

Função intensidade lei de potências

- Lei de Potência (Crow, 1974)

$$\rho(t) = \frac{\beta}{\theta}\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta-1}, \theta > 0, \beta > 0.$$

- Log-linear

$$\rho(t) = \exp(\theta + \beta t)$$

- Outras: Pulcini (2001), Gilardoni, Oliveira e Colosimo (2012, in print).

Função intensidade lei de potências

- $\rho(t) = \frac{\beta}{\theta}\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta-1}, \theta > 0, \beta > 0$, chamada de lei de potências.

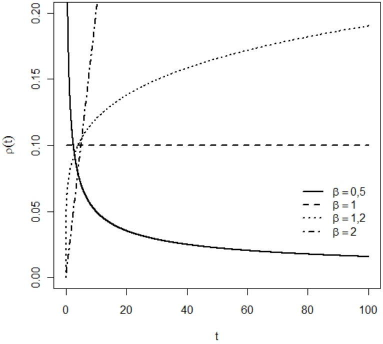


Figura: Gráfico da função intensidade $\rho(t)$ de um PPNH com função intensidade PLP (com $\theta = 10$ e diferentes valores para β).

Truncamento por falha

Truncamento por falha: Quando o acompanhamento do sistema encerra após um número predeterminado de falhas, os dados são ditos serem truncados por falha.

Para dados truncados por falha, a função de verossimilhança é a função densidade de probabilidade conjunta dos tempos de falha $T_1, T_2, \ldots, T_n$.

Truncamento por falha

Truncamento por falha: Quando o acompanhamento do sistema encerra após um número predeterminado de falhas, os dados são ditos serem truncados por falha.

Para dados truncados por falha, a função de verossimilhança é a função densidade de probabilidade conjunta dos tempos de falha $T_1, T_2, \ldots, T_n$.

Teorema

A função densidade de probabilidade conjunta dos tempos de falha $T_1, T_2, \ldots, T_n$ *de um PPNH com função intensidade* $\rho(t)$ *é*

$$f(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \left(\prod_{i=1}^{n} \rho(t_i)\right) \exp\left(-\int_0^{t_n} \rho(u)du\right).$$

Truncamento por falha

Esquema da prova

$$f(t_1, t_2, \ldots, t_n) = f_1(t_1) f_2(t_2|t_1) f_3(t_3|t_1, t_2) \ldots f_n(t_n|t_1, \ldots, t_{n-1}),$$

em que $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$.

$$\begin{aligned} S_1(t_1) &= \Pr(T_1 > t_1) \\ &= \Pr(N(0, t_1] = 0) \\ &= \exp\left(-\int_0^{t_1} \rho(u)du\right), \quad t_1 > 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1(t_1) &= -S_1'(t_1) = -\frac{d}{dt_1}\left[\exp\left(-\int_0^{t_1} \rho(u)du\right)\right] \\ &= \rho(t_1)\exp\left(-\int_0^{t_1} \rho(u)du\right). \end{aligned}$$

$$f_2(t_2|t_1) = \rho(t_2)\exp\left(-\int_{t_1}^{t_2} \rho(u)du\right).$$

Truncamento por falha

Em geral temos

$$f_n(t_k|t_{k-1}) = \rho(t_k)\exp\left(-\int_{t_{k-1}}^{t_k}\rho(u)du\right).$$

A função densidade conjunta de $T_1, T_2, \ldots, T_n$ fica

$$\begin{aligned} f(t_1, t_2, \ldots, t_n) &= \left[\rho(t_1)\exp\left(-\int_0^{t_1}\rho(u)du\right)\right]\left[\rho(t_2)\exp\left(-\int_{t_1}^{t_2}\rho(u)du\right)\right] \\ &\quad \times \ldots \times \left[\rho(t_n)\exp\left(-\int_{t_{n-1}}^{t_n}\rho(u)du\right)\right] \\ &= \left(\prod_{i=1}^{n}\rho(t_i)\right)\exp\left(-\int_0^{t_n}\rho(u)du\right). \end{aligned}$$

Truncamento por tempo

Truncamento por tempo: Os dados são ditos serem truncados por tempo quando o acompanhamento do sistema encerra em um tempo t predeterminado.

Sejam $t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leq t$ os tempos de falha observados até o tempo t para um PPNH com função intensidade $\rho(\cdot) = \rho(\cdot|\boldsymbol{\mu})$ dependendo do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\mu}$. A função de verossimilhança é dada por

$$L(\boldsymbol{\mu}) = \left(\prod_{i=1}^{n} \rho(t_i)\right) \exp\left(-\int_0^t \rho(u)du\right). \quad (1)$$

Um único sistema

Existem expressões analíticas para os estimadores de máxima verossimilhança para funções intensidade lei de potência e log-linear.

- Lei de Potência

$$\widehat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n^*} \log(t_{n^*}/t_i)}$$

  e

$$\widehat{\theta} = \frac{t_{n^*}}{(n^*)^{1/\widehat{\beta}}}$$

  em que $n^* = n - 1$ (truncado por falha) e n (truncado por tempo) e $t_{n^*} = t_n$ (truncado por falha) e t (truncado por tempo).

Múltiplos sistemas

A maneira mais simples de modelar dados de mais de um sistema é considerando que os sistemas são idênticos, ou seja, foram gerados pelo mesmo processo estocástico. Se k sistemas independentes são observados, a função de verossimilhança é o produto de k termos correpondentes dados pela Equação (1),

$$L(\boldsymbol{\mu}) = \prod_{i=1}^{k} \left\{ \left(\prod_{j=1}^{n_i} \rho(t_{ij}) \right) \exp\left(- \int_0^{t_i} \rho(u) du \right) \right\}. \tag{2}$$

Estimador de máxima verossimilhança para PLP

Utilizando a função intensidade lei de potências $\rho(t) = \frac{\beta}{\theta}\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta-1}$, temos $\boldsymbol{\mu} = (\theta, \beta)$.

Zhao (1996) apresentam condições para que o estimador de máxima verossimilhança de $\boldsymbol{\mu}$ seja normal assintoticamente distribuído. Quando pelo menos um dos t_i's ou n_i's em (2) é grande,

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \arg\max L(\boldsymbol{\mu})$$

segue aproximadamente uma distribuição normal com média $\boldsymbol{\mu}$ e matriz de covariância $\boldsymbol{\Sigma}$ dada por menos a inversa da matriz Hessiana de $l = \log L$ avaliada em $\hat{\boldsymbol{\mu}}$.

Estimador de máxima verossimilhança para PLP

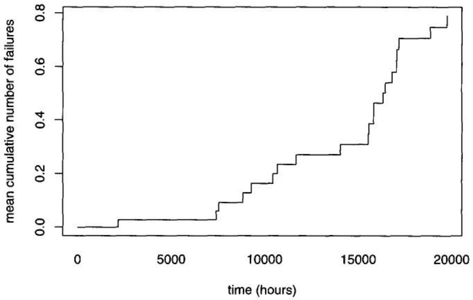
Exemplo: dados de transformadores de potência elétrica

Tabela: Conjunto de dados de transformadores de potência elétrica (Gilardoni e Colosimo, 2007).

Unidade	Tempos			
1	8.839	17.057	(21.887)	
2	9.280	16.442	(21.887)	
3	10.445	(13.533)*	(21.435)	
4	(8.414)*	(21.745)		
5	17.156	(21.887)		
6	16.305	(21.887)		
7	16.802	(21.887)		
8	(4.881)*	(21.506)		
9	7.396	7.541	(19.590)*	(21.711)
10	15.821	19.746	(19.877)*	(21.804)
11	15.813	(21.886)		
12	15.524	(21.886)		
13	(21.440)*	(21.809)		
14	11.664	17.031	(21.857)	
15	(7.544)*	(13.583)*	15.751	(20.281)
16	18.840	(21.879)		
17	(2.288)*	(4.787)*		
18	10.668	(16.838)		
19	15.550	(21.887)		
20	(1.616)*	15.657	(21.620)	

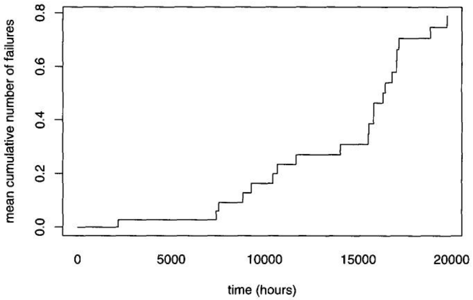
Estimador de máxima verossimilhança para PLP

Exemplo: dados de transformadores de potência elétrica



Estimador de máxima verossimilhança para PLP

Exemplo: dados de transformadores de potência elétrica



$$\hat{\theta} = 24.844 \text{ e } \hat{\beta} = 1,988.$$

Tempo ótimo de manutenção

Política de manutenção em bloco

Suponha que faremos manutenções preventivas em um sistema nos tempos $\tau, 2\tau, \ldots$. Entre 0 e τ, τ e 2τ, etc., o sistema está sujeito a falhas que serão minimamente reparadas com custo c_{RM}. As manutenções preventivas são consideradas reparos perfeitos e tem custo c_{MP}. O custo de manutenção do ciclo de tamanho τ é dado por

$$c_{MP} + c_{RM} N(\tau)$$

e o custo por unidade de tempo é dado por

$$C(\tau) = \frac{c_{MP} + c_{RM} N(\tau)}{\tau}$$

O tempo ótimo de manutenção é $\tau*$ que minimiza o custo esperado por unidade de tempo

$$E[C(\tau)] = E_N\left[\frac{c_{MP} + c_{RM}N(\tau)}{\tau}\right] = \frac{c_{MP} + c_{RM}E[N(\tau)]}{\tau}.$$

Assumindo que $\{N(t) : t \geq 0\}$ é um PPNH com função intensidade lei de potências, então $E[N(\tau)] = \left(\frac{\tau}{\theta}\right)^{\beta}$ e

$$E[C(\tau)] = \frac{c_{MP} + c_{RM}\left(\frac{\tau}{\theta}\right)^{\beta-1}}{\tau}.$$

Assumindo que $\beta > 1$ (que implica que o sistema está deteriorando) obtemos

$$\tau* = \theta\left[\frac{c_{MP}}{(\beta-1)c_{RM}}\right]^{1/\beta}.$$

Alguns resultados e possíveis extensões

- Gilardoni e Colosimo (2007) obtêm o estimador de máxima verossimilhança de $\tau*$ e $C(\tau*)$ utilizando princípio da invariância, e através do método delta encontram as distribuições assintóticas de $\hat{\tau}*$ e $C(\hat{\tau}*)$.
- Gilardoni e Colosimo (2011) realizam estimação não-paramétrica da função intensidade de um PPNH.
- Oliveira, Colosimo e Gilardoni (2012) utiliza abordagem bayesiana para estimar os parâmetros da função intensidade lei de potências de um PPNH, propondo diferentes distribuições a *priori*.