Princípios de Bioestatística
Conceitos de Probabilidade

Enrico A. Colosimo/UFMG

http://www.est.ufmg.br/~enricoc/

Depto. Estatística - ICEx - UFMG

Tipos de Fenômenos

1. Aleatório: Situação ou evento que não pode ser previsto, antecipadamente.

2. Determinístico: Situação ou evento que pode ser previsto antes que tenha ocorrido. Ex.: Leis físicas de Newton

Teoria de Probabilidade

DEF.: É um conjunto de métodos para lidar com a incerteza existente nos fenômenos aleatórios.

- É fundamental para entender as técnicas estatísticas.
- Exemplos: Prevalência , testes diagnósticos (sensibilidade, especificidade, PFP, PFN).

Situação: Corrida de Cavalos

Suponha que você tenha R$10.000,00 para apostar em uma corrida de cavalos.

Abaixo estão as probabilidades dos cavalos A,B e C ganharem a corrida. Em qual cavalo você apostaria?

Cavalo A: 75%

Cavalo B: 20%

Cavalo C: 5%

Conceitos Básicos

1. Espaço Amostral:

   Conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento (Ω)

2. Eventos:

   Subconjuntos de Ω (representados por letras maiúsculas).
   Conjunto vazio: ϕ

3. Operações com Eventos/Conjuntos:

   União, intersecção, complementar, etc.

Exemplo (a)

Um dado equilibrado é lançado:

- Experimento: Lançar um dado (ν).
- Característica de interesse: Número da face superior.
- Espaço Amostral: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.
- Eventos:
  - A = $\{1,3,5\}$ (resultados ímpares)
  - B = $\{2,4,6\}$ (resultados pares)
  - C = $\{1,2,3\}$ (os três menores resultados)

Exemplo (b)

Um certo procedimento cirúrgico é testado para a extração de um tumor:

- Experimento: Realizar a cirurgia para extrair o tumor (ν).
- Característica de interesse: Tempo de sobrevida do paciente após a cirurgia.
- Espaço Amostral: Ω = $\{$0,1,2,3,4,5,6,...$\}$ anos.
- Eventos:
  - A = $\{0\}$ (morte com menos de um ano)
  - B = $\{1,2,3,4,5\}$ (sobrevida de no máximo 5 anos)
  - C = $\{6, ...\}$ (sobrevida maior que 5 anos)

Operações com Eventos

A **união** de dois eventos A e B representa a ocorrência de, pelo menos, um dos eventos A ou B. A união é representada por $A \cup B$.

- Exemplo: (lançamento de um dado)
  - A = 'observa-se um número ímpar'
  - B = 'observa-se um número $\leqslant$ 3'
  - $A \cup B = \{1,2,3,5\}$

Operações com Eventos

A **interseção** entre os (ou dos) eventos A e B é a ocorrência simultânea de A e B. A interseção é representada por $A \cap B$.

- Exemplo: (lançamento de um dado)
  - A = 'observa-se um número ímpar'
  - B = 'observa-se um número $\leqslant 3$'
  - $A \cap B = \{1,3\}$

Operações com Eventos

Dois eventos A e B são **disjuntos** ou **mutuamente exclusivos** quando não têm elementos em comum. Isto é, $A \cap B = \phi$.

- Exemplo: (lançamento de um dado)
  - A = 'observa-se um número ímpar'
  - B = 'observa-se um número par'
  - $A \cap B = \phi$

Operações com Eventos

Dizemos que A e B são **complementares** se sua união é o espaço amostral e a sua interseção é vazia. O complementar de A é representado por A^c e temos:

$$A \cup A^c = \Omega$$

e

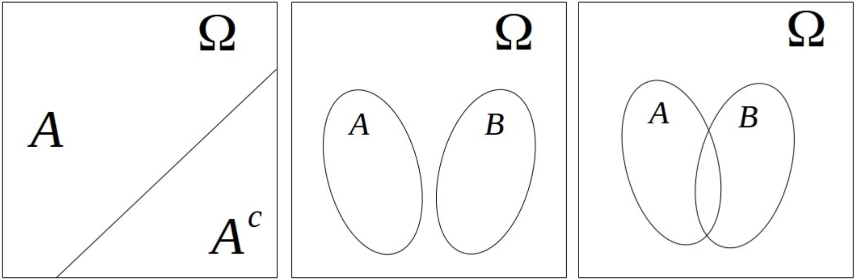
$$A \cap A^c = \phi$$

- Exemplo: (lançamento de um dado)
  - A = 'observa-se um número $\leqslant$ 3'
  - $A^c = \{4,5,6\}$

Axiomas de Probabilidade

- Uma função P(.) é denominada probabilidade, se satisfaz as seguintes condições:

  1. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$, para qualquer evento A em Ω
  2. $P(\Omega) = 1$
  3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ se A e B são disjuntos



$A \cup A^c = \Omega$

$A \cap A^c = \emptyset$

$A \cap B = \emptyset$

$A \cup B$

$A \cap B$

Pelo Diagrama de Venn podemos mostrar que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Exemplo (Hipertensão)

Seja A o evento em que uma pessoa tenha pressão diastólica (PD) normotensiva (PD $<$ 90), e seja B o evento que a pessoa tenha PD no limite (90 $\leqslant$ PD $\leqslant$ 95).

Suponha que P(A)=0,7 e P(B)=0,1.

Seja Z o evento que a pessoa tenha PD $\leqslant$ 95. Assim:

$$P(Z) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}8$$

pois os eventos não podem ocorrer simultaneamente ($A \cap B = \phi$)

Exemplo (Hipertensão)

Sejam os eventos A e B definidos como no exemplo anterior:

$$A = \{PD < 90\} \text{ e } B\ \{90 \leqslant PD \leqslant 95\}$$

Então, $A \cup B = \{PD < 95\}$.

Sejam os eventos C e D:

$$C = \{PD \geq 90\} \text{ e } D\ \{75 \leqslant PD \leqslant 100\}$$

Os eventos C e D não são mutuamente excludentes. Ambos podem ocorrer quando $90 \leqslant PD \leqslant 100$ ou seja:

$$C \cap D = \{90 \leqslant PD \leqslant 100\}$$

Considere dois eventos, A e B, a probabilidade condicional de A dado que ocorreu B, P($A|B$) é dada por:

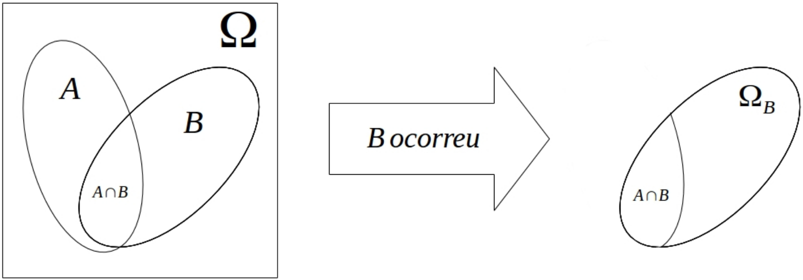
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

P($A|B$) é a proporção dos elementos A que pertencem a B. Ou seja, o 'novo' espaço amostral (Ω_B) é o próprio evento B, de forma que:

$$0 \leq P(A|B) \leq 1$$

Regra do Produto: $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$.

Probabilidade Condicional - Representação Gráfica



Exemplo Didático

Experimento aleatório: lançar duas vezes uma moeda.

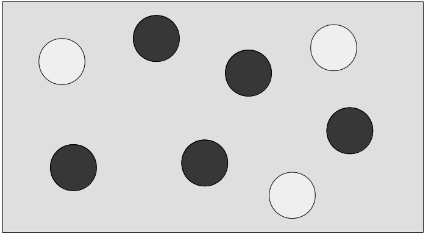
- Espaço Amostral: Ω = {(K,K),(K,c),(c,K),(c,c)}.
- Qual é a probabilidade de ocorrer duas coroas?
  Defina $A = \{(K, K)\}$ e $P(A) = 1/4$.
- Dado que ocorreu coroa ($B = \{(K)\}$) no primeiro lançamento:
  $P(A/B) = 1/2$
- Porque?
  Defina $B = \{\text{coroa no primeiro lançamento.}\}$
  Espaço Amostral reduzido: Ω_K = {(K,K),(K,c)}.
- Utilizando a definição:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/4}{1/2} = 1/2$$

Exemplo Didático

Uma caixa contém 3 bolas brancas e 5 pretas, todas idênticas em peso e tamanho.

- Qual a probabilidade de tirar ao acaso uma bola branca?
- Qual a probabilidade de tirar ao acaso uma bola preta?
- Qual a probabilidade de tirar uma segunda bola branca se a primeira foi preta (sem reposição)?



Independência de Eventos

Dois eventos A e B são independentes se a informação da ocorrência (ou não) de B não altera a probabilidade da ocorrência do evento A.

- $P(A \mid B) = P(A)$ ou
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Exemplo (Hipertensão)

Suponha que estamos realizando uma avaliação de hipertensão em famílias. Seja o espaço amostral constituído de todos os pares da forma (X,Y) em que representam as medições de PD da mãe e do pai. Sejam os eventos abaixo:

$$A = \{\text{PD da mãe} \geq 95\}$$

$$B = \{\text{PD do pai} \geq 95\}$$

e P(A)=0,1 e P(B)=0,2

Se A e B são independentes, então a probabilidade que a mãe e o pai sejam hipertensos é:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02 = 2.\%$$

Exemplo (Hipertensão)

- Admitimos nesse exemplo que as causas da hipertensão são genéticas.
- Por outro lado, se as causas forem ambientais ou de dieta, poderíamos assumir que se a mãe for hipertensiva, aumente a probabilidade do pai ser hipertensivo. Ou seja, P(A) é maior quando B ocorre do que quando o pai não é hipertensivo (B não ocorre).
- Neste último caso, A e B não mais seriam independentes.

Exemplo

Sabendo que a probabilidade de nascer um menino é 0,5, encontre as seguintes probabilidades:

1. Um casal ter duas meninas?
2. Um casal ter duas meninas dado que o primeiro filho é uma menina?
3. Um casal ter duas meninas dado que um dos partos foi de uma menina?
4. Um casal ter duas meninas dado que já nasceu uma ”Marina”?

Exemplo (DST)

Suponha que dois médicos, A e B, testem os pacientes para verificar se possuem sífilis. Sejam os eventos:

- $A^+ = \{$ médico A dá diagnóstico positivo $\}$
- $B^+ = \{$ médico B dá diagnóstico positivo $\}$

Suponha que:

- O médico A diagnosticou 10% dos pacientes como positivo,
- O médico B diagnosticou 17% dos pacientes como positivo e
- Ambos os médicos diagnosticaram 8% dos pacientes como positivo.

Os eventos A e B são independentes?

$$\mathrm{P}(A^+) \cdot \mathrm{P}(B^+) = 0{,}10 \cdot 0{,}17 = 0{,}017$$
$$\mathrm{P}(A^+ \cap B^+) = 0{,}08$$

Ou seja, os eventos não são independentes. Esse resultado faz sentido?

Exemplo (DST)

Qual a probabilidade de que o médico B apresente um diagnóstico positivo de sífilis, dado que o diagnóstico do médico A foi positivo?

$$P(B^+|A^+) = \frac{P(A^+ \cap B^+)}{P(A^+)} = \frac{0,08}{0,1} = 0,8.$$

Assim, o médico B confirmará o diagnóstico positivo dado pelo médico A em 80% das vezes.

No entanto,

$$P(A^+|B^+) = \frac{P(A^+ \cap B^+)}{P(B^+)} = \frac{0,08}{0,17} = 0,47.$$

Eventos Independentes? ”Overbooking” (Mlodinow, p. 43)

Uma companhia aérea tem um lugar restante num voo e ainda restam dois passageiros por chegar para o embarque. Sabe-se que existe uma probabilidade de 2/3 do passageiro que reservou o voo se apresentar para o embarque.

1. Qual é a probabilidade da companhia ter um passageiro insatisfeito?
   - A = {passageiro 1 vai chegar }
   - B = { passageiro 2 vai chegar }

   $$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 2/3 \times 2/3 = 4/9 = 44\%.$$

   Sob a suposição de independência.

2. E se os passageiros viajam juntos (por exemplo, um casal)?

   $$P(A \cap B) = 2/3 = 67\%.$$

Resultados para dois eventos A e B em um espaço amostral Ω

1. Axioma 3:

   $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ se A e B forem disjuntos

2. Independência:

   $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ se A e B forem independentes

3. Resultado Geral:

   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

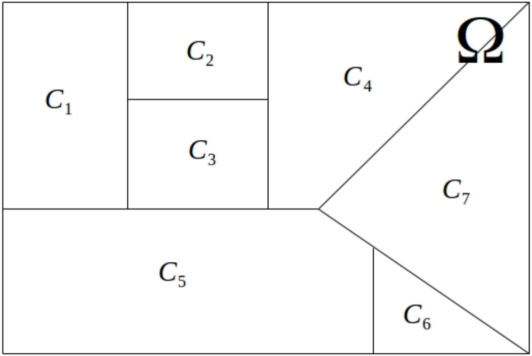
4. Resultado Geral:

   $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$

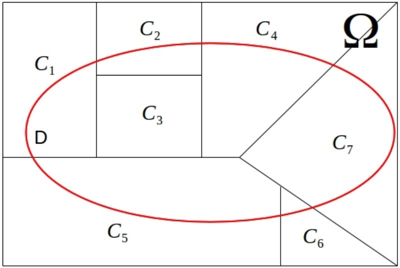
Partição do espaço amostral

Os eventos $C_1, C_2, ..., C_k$ formam uma partição do espaço amostral se eles não tem interseção (são disjuntos) entre si e se sua união é igual ao espaço amostral.

$$C_i \cap C_j = \phi, i \neq j \qquad C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_k = \Omega$$



Partição do espaço amostral



$$D = (C_1 \cap D) \cup (C_2 \cap D) \cup (C_3 \cap D) \cup \ldots \cup (C_7 \cap D)$$

$$\begin{aligned} P(D) &= P(C_1 \cap D) + P(C_2 \cap D) + P(C_3 \cap D) + \ldots + P(C_7 \cap D) \\ &= P(D|C_1)P(C_1) + P(D|C_2)P(C_2) + \ldots + P(D|C_7)P(C_7) \end{aligned}$$

Partição do espaço amostral

As probabilidades condicionais P(B | A) e P(B | A^c) e P(B) estão relacionadas da seguinte forma:

$$P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^c) \cdot P(A^c)$$

Exemplo (Câncer de Mama)

Considere os eventos: A=$\{$mamografia positiva$\}$ e B= $\{$câncer de mama$\}$:

- Entre 100.000 mulheres com mamografias negativas 20 terão câncer de mama em dois anos:

$$P(B|A^c) = \frac{20}{100.000} = 0,0002$$

- Enquanto que uma em 10 com mamografias positivas terão câncer em dois anos:

$$P(B|A) = \frac{1}{10} = 0,1$$

- E, ainda, que 7% da população geral de mulheres terão mamografia positiva. Ou seja,

$$P(A) = \frac{7}{100} = 0,07$$

Exemplo (Câncer)

Qual a probabilidade de uma mulher desenvolver câncer de mama nos próximos dois anos?

$$
\begin{aligned}
P(B) =& P(\text{câncer}) \\
=& P(\text{câncer}|mamog.^{+}) \cdot P(mamog.^{+}) + \\
& P(\text{câncer}|mamog.^{-}) \cdot P(mamog.^{-}) \\
=& P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) \\
=& (0,1) \cdot (0,07) + (0,0002) \cdot (0,93) \\
=& 0,0072
\end{aligned}
$$

Exemplo (Oftalmologia)

Estamos planejando um estudo de 5 anos sobre catarata numa população de cinco mil pessoas com 60 anos ou mais.
Sabemos a partir do último Censo que nessa população:

- 45% tem entre 60-64 anos,
- 28% tem entre 65-69 anos,
- 20% tem entre 70-74 anos e
- 7% tem 75 anos ou mais

Também sabemos de um estudo anterior que 2,4%, 4,6%, 8,8% e 15,3% das pessoas nos respectivos grupos de idade desenvolverão catarata nos próximos 5 anos.

Exemplo (Oftalmologia)

Qual porcentagem dessa população desenvolverá catarata em 5 anos e quantas pessoas isso representa?

- A_1 = { idade entre 60-64 anos } e P(A_1) = 0,45
- A_2 = { idade entre 65-69 anos } e P(A_2) = 0,28
- A_3 = { idade entre 70-74 anos } e P(A_3) = 0,20
- A_4 = { idade $\geq$ 75 anos } e P(A_4) = 0,07
- B = { desenvolverá catarata em 5 anos }

Exemplo (Oftalmologia)

- P(B|A_1) = 0,024
- P(B|A_2) = 0,046
- P(B|A_3) = 0,088
- P(B|A_4) = 0,153

De modo que:

$$\begin{aligned}
P(B) &= P(B|A_1)\cdot P(A_1) + P(B|A_2)\cdot P(A_2) + P(B|A_3)\cdot P(A_3) + P(B|A_4)\cdot P(A_4)\\
&= (0,024)\cdot(0,45) + (0,046)\cdot(0,28) + (0,088)\cdot(0,20) + (0,153)\cdot(0,07)\\
&= 0,052
\end{aligned}$$

CONCLUSÃO: 5,2% da população, ou seja, 260 (5.000 · 0,052) pessoas desenvolverão catarata nos próximos 5 anos.

Exercício - Monty Hall

Você foi convidado pelo Sílvio Santos para participar de um programa de auditório.

No palco existem três portas: em uma delas tem um carro e nas demais um livro em árabe.

Você ganha o carro se escolher a porta certa.

Digamos que você escolhe a primeira porta, ao acaso. Das duas restantes, o Sílvio Santos abre a segunda porta, e vê-se que tem um dos livros.

Você mudaria sua aposta para a terceira porta?

Resposta: https://www.youtube.com/watch?v=hcFkic2I8zU