Extensão aos Modelos Lineares

Introdução à Otimização Numérica

Marcelo Azevedo Costa
www.est.ufmg.br/~azevedo
Departamento de Estatística
Universidade Federal de Minas Gerais

Apresentação

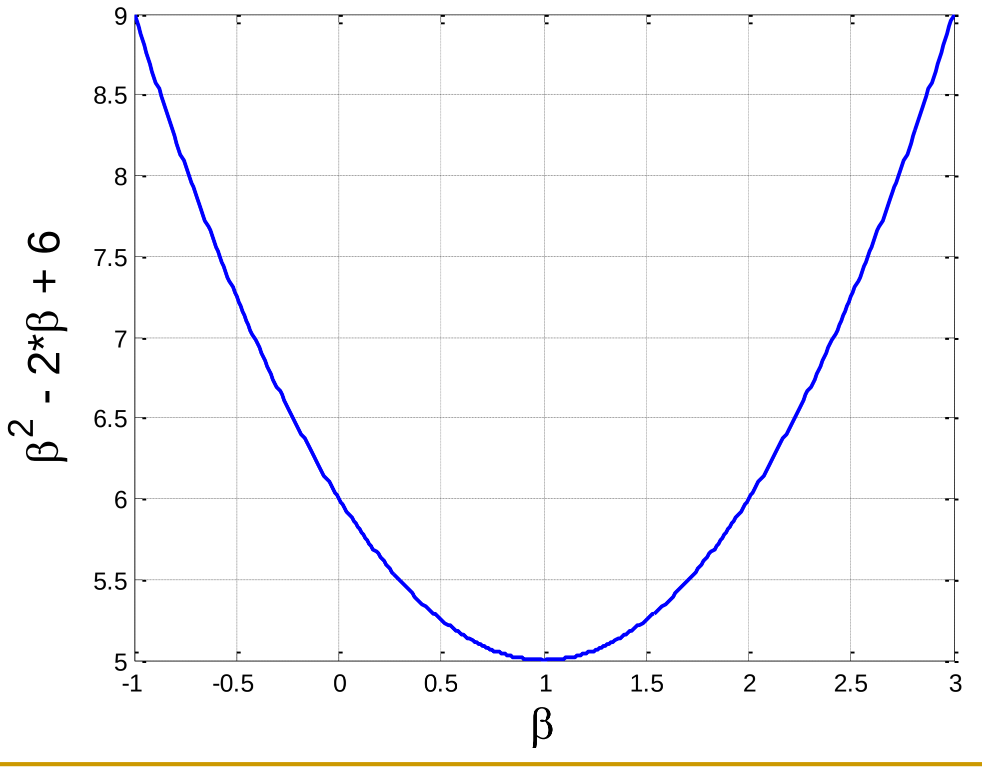
- A otimização numérica tem como objetivo obter estimativas pontuais para parâmetros quando não é possível obter uma forma “fechada”.

- O processo de estimação é realizado de forma iterativa.

Exemplo 1

Encontrar o ponto de mínimo de:

$$f(\beta) = \beta^2 - 2\beta + 6$$



Método do Gradiente Descendente

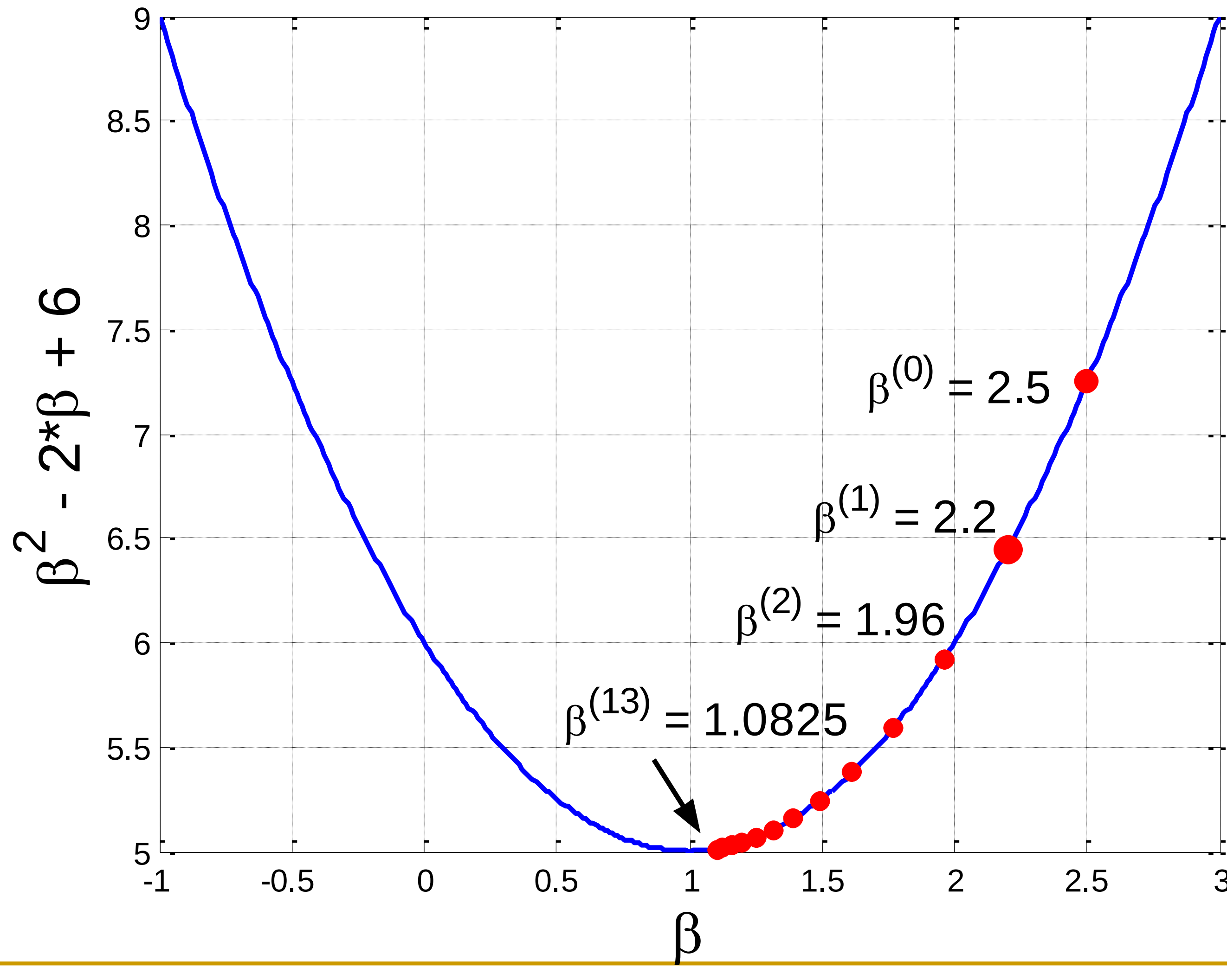
- É um método iterativo:
  - Uma solução inicial arbitrária é selecionada
  - A solução é atualizada na direção do gradiente descendente (direção de minimização)

$$\beta^{(m+1)} = \beta^{(m)} - \alpha \cdot \nabla\beta^{(m)}$$

$$\nabla\beta^{(m)} = \frac{\partial f(\beta)}{\partial\beta}$$

  - α é a ***taxa de aprendizado***,($\alpha > 0$)

Método do Gradiente Descendente



Fazer código!

Considerações no Método do Gradiente Descendente

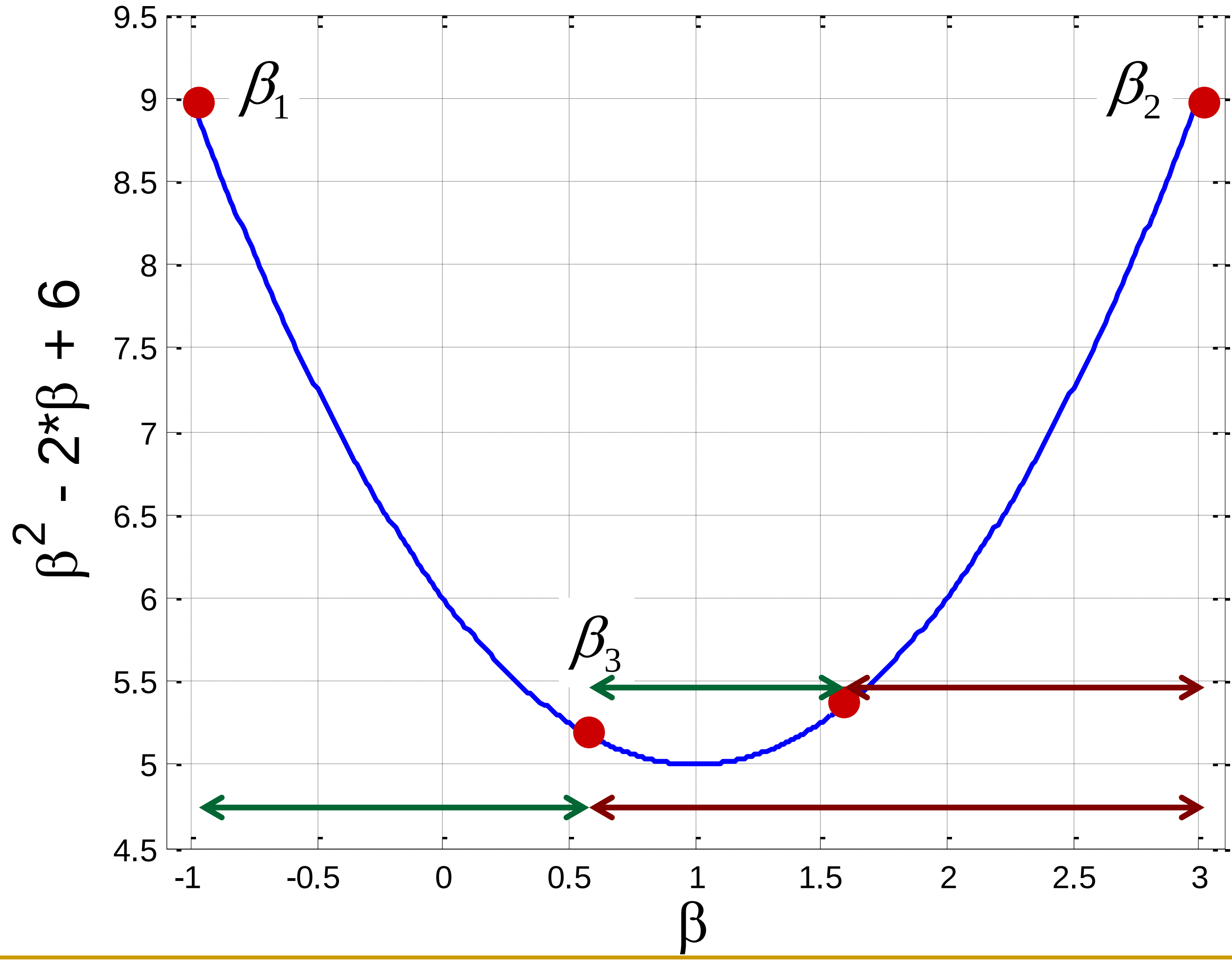
- É um método iterativo muito popular para a estimação de pontos de mínimos e máximos de funções.
- É um método de simples implementação.
- O método é sensível à escolha do parâmetro α.
- Não é possível determinar a variância do estimador. O método gera uma estimativa pontual, apenas.

Método da Seção Áurea

- É um método iterativo que obtém um ponto de máximo ou mínimo de funções unimodais.

- É necessário especificar o intervalo onde o ponto de máximo/mínimo está localizado.

Ilustração do Método da Seção Áurea

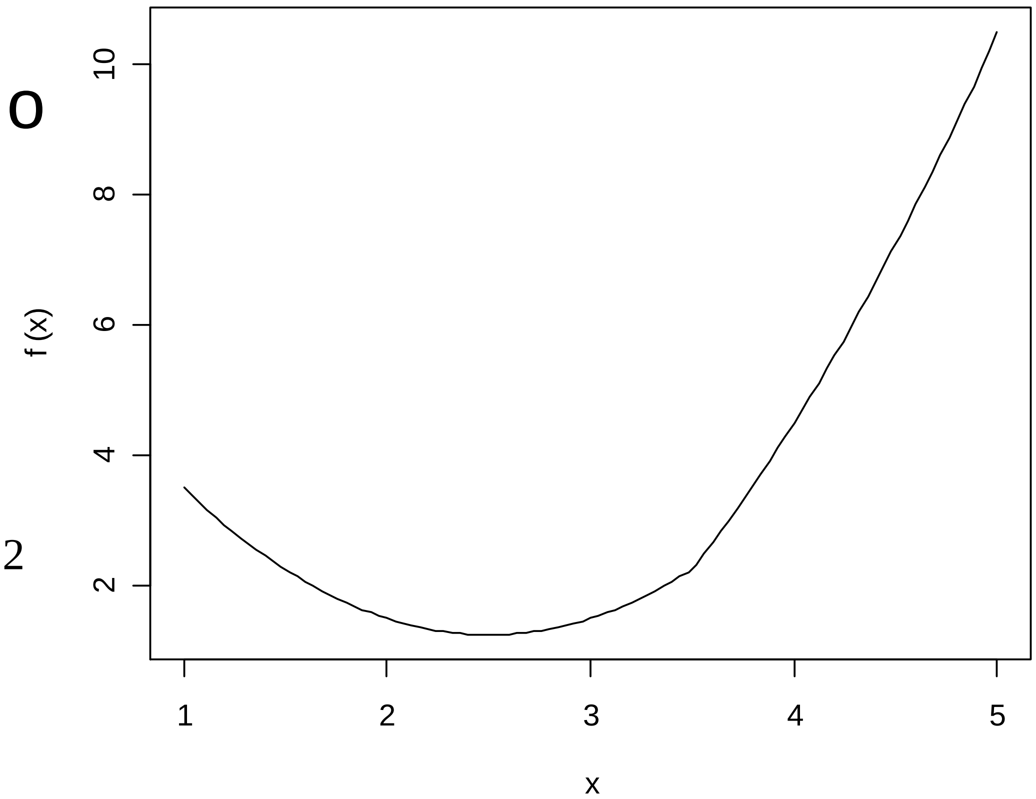


aula10.R

Seção Áurea – exemplo (b)

- Deseja-se encontrar o ponto de mínimo da seguinte função no intervalo [1;5]:

$$f(x) = |x - 3.5| + (x-2)^2$$




```
f <- function(x){ abs(x - 3.5) + (x - 2)^2 }

curve(f,from = 1, to = 5)
```

Considerações sobre o Método da Seção Áurea

- É um método mais rápido que o método do gradiente descendente.

- O método pressupõe que o intervalo especificado pelo usuário contém o ponto extremo (mínimo ou máximo)

Método misto: Gradiente Descendente e Seção Áurea

$$\beta^{(m+1)} = \beta^{(m)} + \alpha^{*} \cdot \nabla \beta^{(m)}$$

$$\alpha^{*} \in (0,1]$$

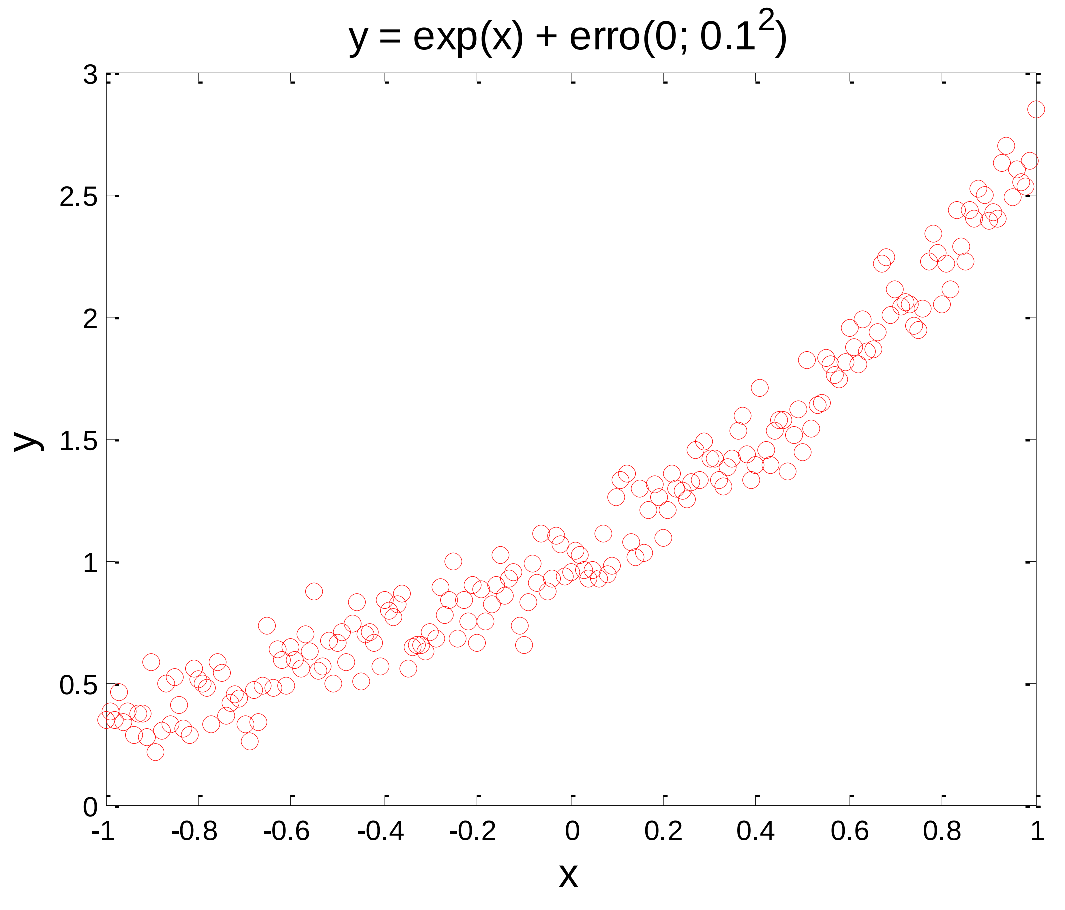
α* é obtido utilizando o algoritmo da Seção Áurea

Este método permite otimizar modelos com mais de um parâmetro.

Exemplo 2

$$y = \beta_0 e^{\beta_1 x} + \xi$$

$$\xi \sim N(0, \sigma^2)$$



aula10b.R e aula10c.R (Gradiente descendente + Seção Áurea)

Objetivo: Minimizar a Soma dos Quadrados dos Erros

$$f(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ y_i - \left(\beta_0 e^{\beta_1 x} \right) \right\}^2$$

$$\frac{\partial f(.)}{\partial \beta_0} = \sum_{i=1}^{n} 2. \{ y_i - (\beta_0 e^{\beta_1 x_i}) \} (- e^{\beta_1 x_i})$$

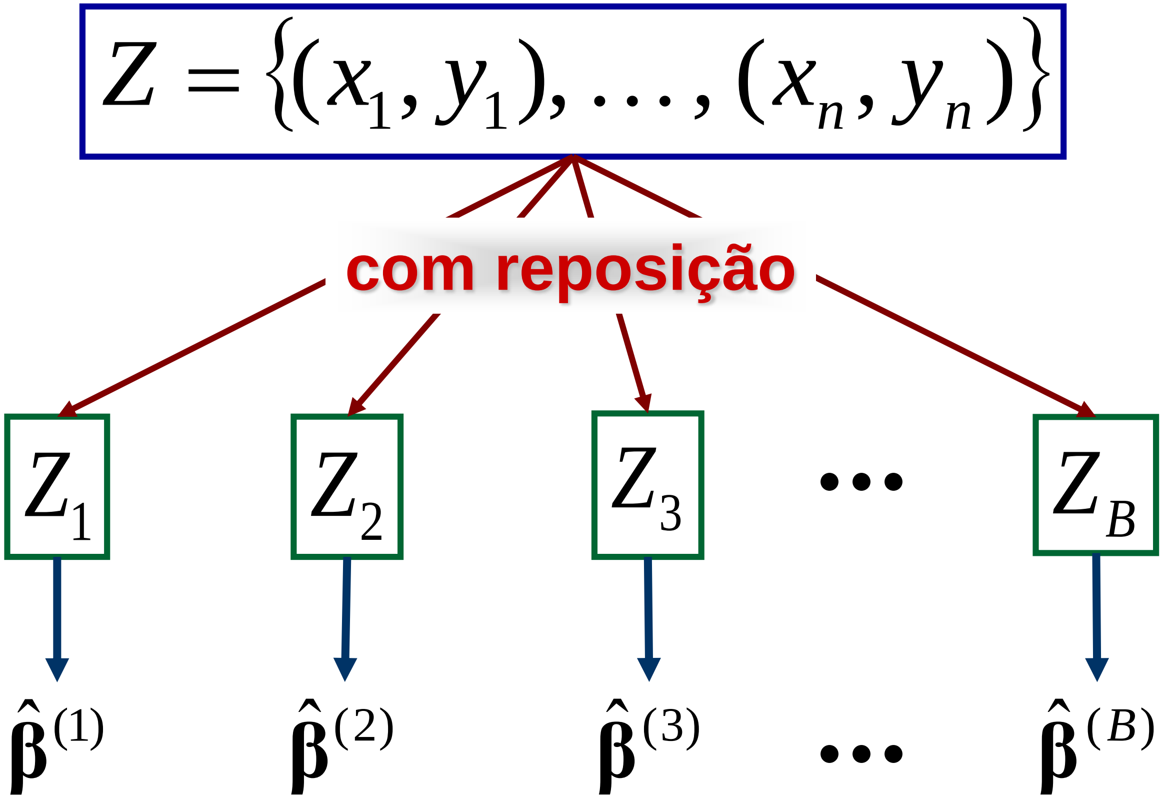
$$\frac{\partial f(\cdot)}{\partial \beta_1} = \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot \left\{ y_i - \left(\beta_0 e^{\beta_1 x_i} \right) \right\} \cdot (-1) \cdot \left(\beta_0 e^{\beta_1 x_i} \right) \cdot x_i$$

Objetivo: Minimizar a Soma dos Quadrados dos Erros

$$\begin{bmatrix} \beta_0^{k+1} \\ \beta_1^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0^{k} \\ \beta_1^{k} \end{bmatrix} - \alpha^* \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(\cdot)}{\partial \beta_0^k} \\ \dfrac{\partial f(\cdot)}{\partial \beta_1^k} \end{bmatrix}$$

onde $0 \leq \alpha^* \leq 2$ (o limite superior foi escolhido de forma arbitrária). O valor de α^* é escolhido segundo o método da Seção Áurea de forma que a cada iteração a função $f(.)$ seja minimiza de forma ótima.

Método de Inferência Bootstrap (reamostragem)



aula10d.R

Comentário

- Existem métodos de otimização numérica mais eficientes que os métodos apresentados. Entretanto tais métodos apresentam maior complexidade de implementação.
  - Na grande maioria dos casos, métodos mais complexos são métodos mais rápidos e com maior acurácia.