# Probabilidade - aula I

Marcos Oliveira Prates

2012/02

## Objetivos

Ao final deste capítulo você deve ser capaz de:

- Entender e descrever espaços amostrais e eventos para experimentos aleatórios.
- Interpretar probabilidades.
- Calcular probabilidades de eventos em espaços amostrais discretos.
- Usar combinações permutações para contar número de resultados.

# Espaços Amostrais e Eventos

## Experimento Aleatório

- Um experimento que pode fornecer diferentes resultados, mesmo sendo repetido toda vez da mesma maneira.

## Exemplo:

- Se medimos a corrente em um fio, estamos conduzindo um experimento.
- Em repetições diárias dessas medidas, os resultados poderão diferir levemente.
- Isso pode ocorrer por causa de variações em variáveis que não estamos controlando, como:
  - variações na temperatura;
  - variações nos medidores;
  - impurezas na composição química do fio.
- Dizemos então que esse experimento tem um **componente aleatório.**

- Não importa quão cuidadosamente o experimento tenha sido planejado, a variação está quase sempre presente.
- Sua magnitude pode ser tão grande que as conclusões do experimento podem não ser tão óbvias.
- Precisamos então de métodos para modelar e analisar os resultados desses experimentos.

- Queremos compreender, quantificar e modelar variações que encontramos com frequência.
- Modelos que incluem variação não são diferentes de modelos de outras áreas como engenharia e ciência.
- Por exemplo, as Leis de Newton não são uma descrição perfeita do nosso universo físico.
- Porém são modelos úteis para quantificar o desempenho de produtos em engenharia.

- Precisamos formular uma abstração matemática do fenômeno estudado.
- E validá-la com medidas de nosso sistema.
- O modelo pode, então, ser usado para entender aspectos do sistema físico.
- Pode ser usado ainda para prever a resposta do sistema à alimentação de dados (*inputs*).

## Espaços Amostrais

- Para modelar um experimento aleatório devemos entender o conjunto de **resultados** possíveis.
- Esse conjunto de resultados possíveis é denominado **espaço amostral**
- O espaço amostral é geralmente definido baseado nos objetos da análise.

### Espaço Amostral

Conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. É denotado por S.

## Exemplo:

- Medir a espessura de uma peça plástica moldada.
- O valor da espessura depende de:
  - resolução do instrumento de medição;
  - dos limites superior e inferior da espessura.
- Podemos, porém, simplesmente definir o espaço amostral como a linha real positiva

$$S = R^{+} = \{x|x > 0\}$$

- Pois a espessura não pode assumir valores negativos.

- Se sabemos que todas peças tem espessura entre 10 e 11 milímetros, podemos definir

$$S = \{x | 10 < x < 11\}$$

- Se queremos considerar apenas o fato da peça ter espessura baixa, média ou alta, pode-se considerar

$$S = \{\text{baixa, média, alta}\}$$

- Se queremos avaliar se a peça obedece ou não a determinadas especificações podemos dizer que

$$S = \{\text{sim, não}\}$$

que indica se as peças obedecem ou não.

Existem dois tipos de espaços amostrais:

**Discreto**

Consiste em um conjunto finito ou infinito contável de resultados.

**Contínuo**

Contém um intervalo (tanto finito quanto infinito) de números reais.

No exemplo anterior:

- $S = R^{+}$ é um espaço amostral contínuo;
- $S = \{\text{sim, não}\}$ é um espaço amostral discreto.

A escolha do espaço amostral depende do objetivo do estudo.

## Exemplo:

- Se dois conectores são selecionados.
- Medimos a espessura de cada um deles.
- Podemos estender o espaço amostral anterior.
- O espaço amostral será o quadrante positivo

$$S = R^{+} \times R^{+}$$

- Se queremos apenas saber se os conectores seguem ou não determinadas especificações.
- Abreviamos *sim* ou *não* para *s* e *n*.
- *sn* indica que o primeiro conector obedece e o segundo não; os demais são análogos.
- O espaço amostral é representado por:

$$S = \{ss,\ sn,\ ns,\ nn\}$$

- Se estivermos interessados apenas no número de peças conformes na amostra

$$S = \{0,\ 1,\ 2\}$$

- Considere outro experimento.
- A espessura é medida até que o conector não satisfaça as especificações.
- O espaço amostral é dado por

$$S = \{n,\ sn,\ ssn,\ sssn,\ \text{ e assim por diante}\}$$

esse é um exemplo de espaço discreto que infinito contável.

- Muitos experimentos envolvem a seleção de objetos dentro de um grupo.
- Como retirar bolas de uma urna.
- Devemos indicar se o item será reposto ou (**com reposição**) ou não (**sem reposição**) antes da próxima seleção.

## Exemplo:

- Temos três itens $\{a,\ b,\ c\}$.
- Vamos selecionar dois itens **sem reposição.**
- O espaço amostral é dado por

$$S_{sem} = \{ab,\ ac,\ ba,\ bc,\ ca,\ cb\}\ .$$

- Consideramos a ordem os elementos retirados:
  - *ab* e *ba* são elementos distintos do espaço amostral.
- Se não considerarmos a ordem o espaço amostral se reduz a

$$S_{sem} = \{\{a, b\},\ \{a, c\},\ \{b, c\}\}\ .$$

## Exemplo:

- Temos novamente três itens $\{a,\ b,\ c\}$.
- Selecionamos dois itens **com reposição.**
- Os resultados possíveis passam a ser

$$S_{com} = \{aa,\ ab,\ ac,\ ba,\ bb,\ bc,\ ca,\ cb,\ cc\}\ .$$

- **Observações:** a amostragem **sem reposição** é mais comum em aplicações industriais.

- Em alguns casos não é necessário especificar o item exato, mas somente uma propriedade.
- Suponha que em um conjunto de itens:
  - existem 5 defeituoso e 95 bons.
- Selecionamos dois itens sem reposição.
- Seja *b* um item bom e *d* o item defeituoso.
- É suficiente descrever o espaço amostral em termos da qualidade dos itens

$$S = \{bb,\ bd,\ db,\ dd\}\ .$$

- Observe que existem muito mais pares de itens em que ambos são bons.
- Estamos porém apenas listando os resultados possíveis.
- Essas diferenças serão consideradas quando calcularmos probabilidades.

- Uma outra forma de descrever espaços amostrais é através de **diagrama em forma de árvore.**
- Usado quando podemos construir o espaço amostral em várias etapas.
- Podemos representar da seguinte forma:
  - no primeiro ramo, cada uma das $n_1$ maneiras de completar a primeira etapa;
  - no segundo ramo, cada uma das $n_2$ maneiras de completarmos a segunda etapa;
  - assim por diante.

## Exemplo:

- Um sistema digital recebe mensagens.
- Elas são classificadas conforme são recebidas dentro de um tempo especificado.
- Três mensagens são classificadas, temos o seguinte espaço amostral.

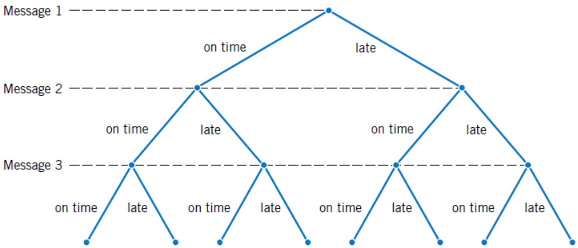



Figure 2-5 Tree diagram for three messages.

## Exemplo:

- Um fabricante de automóveis provê veículos equipados com opcionais selecionados.
- Cada veículo é ordenado:
  - com ou sem transmissão automática;
  - com ou sem ar condicionado;
  - com uma das três escolhas de sistema estéreo;
  - com uma das quatro cores exteriores.

- Esse espaço amostral tem 48 resultados possíveis ($2 \times 2 \times 3 \times 4$).
- O espaço amostral pode ser representado pelo seguinte diagrama:

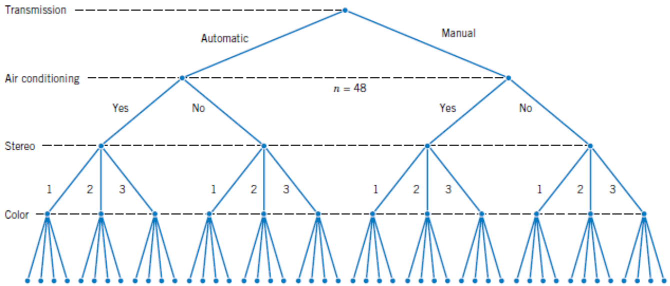



Figure 2-6 Tree diagram for different types of vehicles.

## Eventos

- Frequentemente estamos interessados em um conjunto de resultados possíveis.
- Podem ser descritos com subconjuntos do espaço amostral.
- Podemos aplicar também operações de conjuntos.

**Evento**

Subconjunto do espaço amostral de um experimento aleatório.

- Podemos estar interessados em novos eventos a partir de combinações dos eventos existentes.
- Como são subconjuntos, podemos usar operações básicas de conjuntos.
- As principais operações:
  - união;
  - interseção;
  - complemento.

### União entre dois enventos

Todos resultados que estão contidos em cada um dos dois eventos. Notação: $E_1 \cup E_2$.

### Interseção entre dois eventos

Todos resultados que estão nos dois eventos simultaneamente. Notação: $E_1 \cap E_2$

### Complemento de um evento

Conjunto dos resultados do espaço amostral que não estão no evento. Notação: o complemento de $E$ é denotado por $E'$.

## Exemplo:

- Considere o espaço amostral do exemplo anterior

$$S = \{ss,\ sn,\ ns,\ nn\}\ .$$

- Seja $E_1$ o subconjunto dos resultados para os quais no mínimo uma peça é conforme

$$E_1 = \{ss,\ sn,\ ns,\}\ .$$

- Seja $E_2$ o subconjunto dos resultados para os quais no mínimo uma peça é não-conforme

$$E_2 = \{sn,\ ns,\ nn\}\ .$$

- Então

$$E_1 \cup E_2 = S, \quad E_1 \cap E_2 = \{sn,\ ns\} \quad \text{e} \quad E_1' = \{nn\}\ .$$

- Podemos usar **diagramas de Venn** para descrever relações entre eventos.

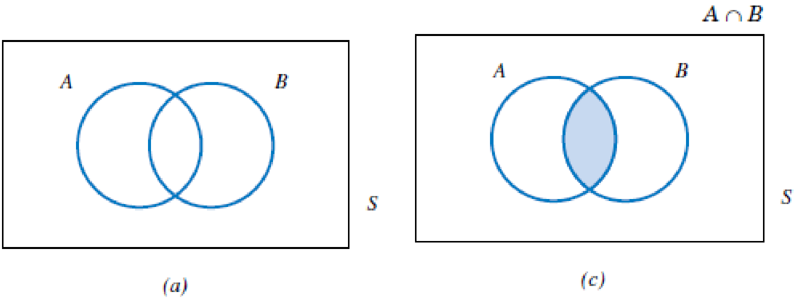



Figura: Diagramas de Venn

## Eventos mutuamente excludentes

Dois eventos $E_1$ e $E_2$ tais que

$$E_1 \cap E_2 = \emptyset \, .$$

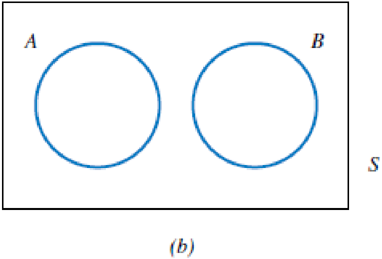



Figura: Eventos mutuamente excludentes.

Resultados adicionais sobre conjuntos:

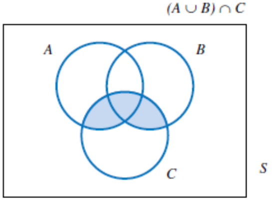
- Pela definição de complemento

$$(E')' = E \, .$$

- Lei distributiva

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

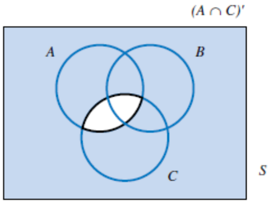
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$




(d)

- Lei DeMorgan:

$$(A \cap B)' = A' \cup B' \quad \text{e} \quad (A \cup B)' = A' \cap B'$$




(e)

## Técnicas de Contagem

- Em muitos exemplos é fácil determinar o número de resultados em cada evento.
- Em exemplos mais complicados podem ser necessárias algumas **técnicas de contagem**.

## Regra da Multiplicação

- Se uma operação puder ser descrita em $k$ etapas e
  - se o número de maneiras de completar a etapa 1 for $n_1$;
  - número de maneiras de completar a etapa 2 for $n_2$
  - e assim por diante.
- O número total de completar a operação será

$$n_1 \times n_2 \ldots n_k \ .$$

## Permutações

- Número de sequências ordenadas de um conjunto.
- O número de permutações de $n$ elementos é $n!$ sendo

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \cdots \times 2 \times 1 \, .$$

- Coloca-se na primeira posição um dos $n$ elementos.
- Seleciona-se para segunda posição um dentre os $n-1$ restantes.
- E assim sucessivamente.

## Permutações de subconjuntos

- Podemos estar interessados no número de arranjos de alguns elementos do conjunto.
- O número de permutações de subconjuntos de $r$ elementos selecionando em $n$ elementos é dado por

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

## Exemplo:

- Um placa de circuito tem oito localizações diferentes.
- Quatro componentes distintos são colocados na placa.
- Quantos projetos diferentes são possíveis?
- Precisamos selecionar uma localização entre as 8 para a primeira componente.
- Uma localização dentre as sete restantes para a segunda e assim por diante.
- O número de projetos possíveis é dado por

$$P_4^8 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = \frac{8!}{4!}$$

## Permutações de objetos similares

- Podemos querer contar sequências ordenadas de objetos não todos diferentes.
- O número de permutações de $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$ objetos.
- Nos quais $n_1$ são de um tipo, $n_2$ de um segundo tipo, $\ldots$, e $n_r$ de um r-ésimo tipo.
- O total de resultados possíveis é

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!}$$

## Exemplo:

- Uma peça é marcada pela impressão de:
  - 4 linhas espessas;
  - 3 linhas médias;
  - 2 linhas finas.
- Cada ordenação das 9 linhas representa um marca diferente.
- O total de marcas possíveis é dado por

$$\frac{9!}{4!3!2!}$$

## Combinações

- Queremos contar o número de subconjuntos de $r$ elementos a partir de um conjunto de $n$ elementos ($r < n$).
- A ordem não é importante.
- O número total de resultados possíveis é dado por

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

## Exemplo:

- Um componente pode ser colocado em 8 localizações diferentes uma placa de circuito.
- Cinco componentes idênticos são colocados na placa.
- Cada projeto é um subconjunto das 8 localizações que podem conter os componentes.
- O número total de projetos é

$$C_5^8 = \frac{8!}{5!3!}$$

## Exemplo (amostragem sem reposição):

- 50 itens são fabricados.
- 3 são defeituosos e 47 são não-defeituosos.
- Uma amostra de 6 itens é selecionada.
- Quantas amostras têm exatamente 2 itens defeituosos?

## Solução:

- Primeiro selecionamos 2 dois dos 3 itens defeituosos

$$\binom{3}{2}.$$

- Depois selecionamos 4 dentre os 47 itens não defeituosos

$$\binom{47}{4}.$$

- O número total de possibilidades, usando a regra da multiplicação é dado por

$$\binom{3}{2} \times \binom{47}{4}.$$