Variáveis Aleatórias Discretas e Distribuição de Probabilidades - parte II

Marcos Oliveira Prates

2012/02

Objetivos

Ao final deste capítulo você deve ser capaz de:

- Ententer suposições para cada uma das distribuições discretas apresentadas.
- Selecionar a distribuição discreta em situações específicas.
- Calcular probabilidades, médias e variâncias para as distribuições discretas apresentadas.

Distribuição Uniforme Discreta

- É a variável aleatória discreta mais simples.
- Assume um número finito de valores.
- Cada um com igual probabilidade.
- Se X segue uma distribuição uniforme discreta:
  - os possíveis valores de X são $x_1, \ldots, x_n$
  - todos eles com probabilidade $1/n$.

Distribuição Uniforme Discreta

X tem distribuição uniforme discreta se cada um dos n valores em sua faixa, $(x_1, \ldots, x_n)$ tiver igual probabilidade.
Sua função de probabilidade é dada por

$$f(x_i) = \frac{1}{n}.$$

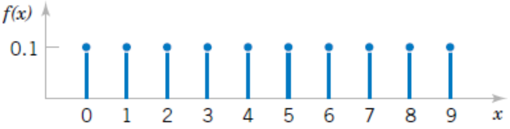


Figure 3-7 Probability mass function for a discrete uniform random variable.

Exemplo:

- O primeiro dígito de um número de uma peça é igualmente provável de ser cada um dos números de 0 a 9.
- Uma peça é selecionada aleatoriamente.
- Seja X o primeiro dígito do número da peça.
- X tem uma distribuição uniforme discreta.
- Seus valores possíveis são $R = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.
- Sua função de probabilidade é dada por

$$f(x_i) = 0,1$$

para cada x_i em R.

- Suponha que X pode assumir quaisquer valores consecutivos

$$a, a+1, a+2, \ldots, b, \quad \text{para } a \leq b \ .$$

- X pode assumir $(b-a+1)$ valores distintos, cada um com probabilidade

$$\frac{1}{b-a+1} \ .$$

- Portanto, a função de probabilidade de X é dada por

$$f(x_i) = \frac{1}{b-a+1}$$

para $x_i \in \{a, a+1, a+2, \ldots, b\}$.

Média e Variância

- Para $E(X)$, vamos usar a soma de uma p.a.:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

- Temos então que

$$E(X) = \frac{(b + a)}{2}.$$

- A variância não será mostrada aqui

$$Var(X) = \frac{(b - a + 1)^2 - 1}{12}.$$

Média e Variância

Se X tem distribuição uniforme discreta e assume valores $a, a+1, a+2, \ldots, b$, para $a \leq b$ temos então que:

- A média de X é
$$E(X) = \frac{b+a}{2}$$
- A variância de X é
$$Var(X) = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}.$$

Exemplo:

- Um sistema de comunicação possui 48 linhas externas.
- Seja X o número de linhas em uso.
- Considere que X é uma variável uniforme discreta, que assume valores de 0 a 48.
- Temos então que

$$E(X) = \frac{(48+0)}{2} = 24$$

$$Var(X) = \frac{(48-0+1)^2-1}{12} \quad \sigma = \sqrt{\frac{(48-0+1)^2-1}{12}} = 14,4.$$

Observações:

- Se todos valores de X são multiplicados por uma constante :

$$Y = kX \ .$$

- A média fica multiplicada por k

$$E(Y) = kE(X) \ .$$

- A variância fica multiplicada por k^2

$$Var(Y) = k^2 Var(X) \ .$$

- O desvio padrão fica multiplicado por k

$$\sqrt{Var(Y)} = k\sqrt{Var(X)} \ .$$

Exemplo:

- Considere novamente o exemplo da 48 linhas telefônicas.
- Seja Y a **proporção** de linhas que estão em uso.
- E X o **número** de linhas em uso.
- Temos então que $Y = X/48$.
- Logo

$$E(Y) = \frac{E(X)}{48} = 0,5\,.$$

$$Var(Y) = \frac{Var(X)}{48^2} = 0,087\,.$$

Distribuição Binomial

Considere os seguintes experimentos e as variáveis aleatórias:

1. Jogue uma moeda 10 vezes.
   - $X =$ número de caras obtidas.
2. Um tear produz 25 peças.
   - 1% são defeituosas;
   - $X =$ número de peças defeituosas.
3. 5 *bits* são transmitidos através de um canal digital.
   - 10% são recebidos com erro;
   - $X =$ número de *bits* com erro.

- Cada experimento pode ser considerado como uma série de tentativas aleatórias e repetidas:
  - 10 arremessos da moeda;
  - a produção de 25 peças;
  - o envio de 5 *bits*.
- X é uma contagem do número de tentativas que satisfazem determinado critério.
- Podemos resumir cada tentativa como resultando em um sucesso ou fracasso.
- X conta o número de sucessos.
- Observação: os termos *sucesso* e *falha* são apenas designações.

- Esse tipo de tentativa (com somente dois resultados possíveis) é chamada **tentativa de bernoulli**.
- Considera-se que elas são **independentes**.
- O resultado de uma não tem efeito sobre a outra:
  - se já sairam muitas caras não significa que irá aparecer uma coroa.
- Supõe-se ainda que a probabilidade de sucesso em cada tentativa é **constante**.

Exemplo:

- Considere o exemplo dos *bits* transmitidos por um canal digital digital.
- 4 *bits* são transmitidos.
- A probabilidade de um *bit* ser recebido com erro é 0,1.
- Suponha que as tentativas de transmissão são independentes.
- Seja X o número de *bits* transmitidos com erro.
- Calcule $P(X = 2)$.

Solução:

- Defina

$$E = \{\text{um } \textit{bit} \text{ com erro}\} \quad \text{e } O = \{\text{um } \textit{bit} \text{ bom}\}$$

- O quadro a seguir representa os resultados possíveis do experimento e os respectivos valores de X.

Outcome	x	Outcome	x
OOOO	0	*EOOO*	1
OOOE	1	*EOOE*	2
OOEO	1	*EOEO*	2
OOEE	2	*EOEE*	3
OEOO	1	*EEOO*	2
OEOE	2	*EEOE*	3
OEEO	2	*EEEO*	3
OEEE	3	*EEEE*	4

Solução (continuação):

- O evento $X = 2$ corresponde a seis resultados $\left(\frac{4!}{2!2!}\right)$

$$\{EEOO, EOEO, EOOE, OEEO, OEOE, OOEE\}\,.$$

- Como as tentativas são independentes

$$P(EEOO) = (0,1)^2(0,9)^2 = 0,0081\,.$$

- Todos os resultado para $X = 2$ são mutuamente excludentes e têm a mesma probabilidade (0,0081).
- Ou seja

$$P(X = 2) = 6(0,0081) = 0,0486\,.$$

Solução (continuação):

- De um modo geral temos que

$$P(X = x) = (\text{número de resultados com } x \text{ erros})(0,1)^x(0,9)^{4-x}.$$

- Precisamos de uma expressão para contar o número de resultados com x erros.
- Temos um total de quatro tentativas.
- Dentre essas 4 tentativas precisamos escolher x para serem erros.
- O total de possibilidades então é dado por

$$\binom{4}{x} = \frac{4!}{x!(4-x)!}.$$

- Se $x = 2$, temos que $\binom{4}{2} = 6$.

Distribuição Binomial

Um experimento aleatório consiste em n tentativas de Bernoulli, de modo que:

1. as tentativas sejam independentes;
2. elas resultam em um sucesso ou um falha;
3. a probabilidade de sucesso p permanece constante.

A variável X, que conta o número de sucessos, é uma **variável binomial** com parâmetros $0 < p < 1$ e $n = 1, 2, \ldots$.
A função de probabilidade de X é dada por

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \ .$$

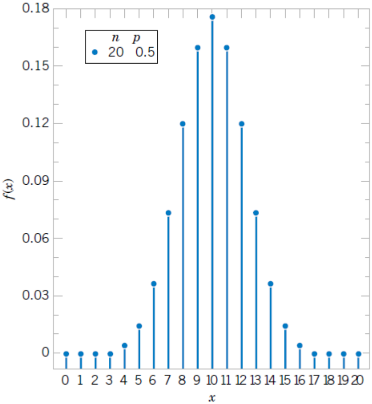
- Para verificar que a soma das probabilidades é um basta usar o fato que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

- Se p é a probabilidade de sucesso, basta fazer $a = p$ e $b = 1 - p$

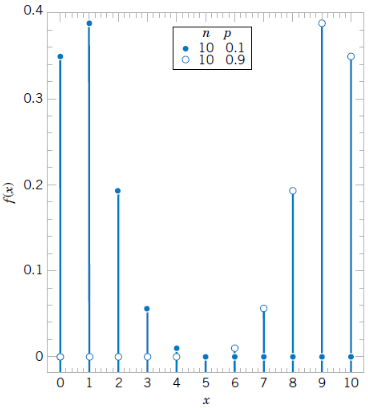
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1\,.$$

- A figura abaixo mostra um exemplo de distribuição binomial.



- Para $p = 0,5$ a distribuição é simétrica.

- Abaixo temos um outro exemplo da binomial.



- Para *n* fixo, a distribuição fica mais assimétrica:
  - quando *p* fica mais próximo de 0 ou 1.

Exemplo:

- 18 amostras de ar são selecionadas.
- Cada uma tem 10% de chance de conter um poluente orgânico.
- Considere que as amostras sejam independentes.
- Seja X o número de amostras que têm o poluente.
- Qual a probabilidade de exatamente 2 amostras terem o poluente?
- Qual a probabilidade de no mínimo 4 amostras conterem o poluente?

Solução:

Probabilidade de exatamente 2 conterem o poluente.

- X tem distribuição binomial de parâmetros $p = 0,1$ e $n = 18$.
- Logo
$$P(X = 2) = \binom{18}{2}(0,1)^2(0,9)^{16}$$
- Como
$$\binom{18}{2} = \frac{18!}{2!16!} = \frac{(18)(17)}{2} = 153;$$
temos que
$$P(X = 2) = 153(0,1)^2(0,9)^{16} = 0,284\,.$$

Solução (continuação): Probabilidade de pelo menos 4 conterem o poluente.

- A probabilidade requerida é

$$P(X \geq 4) = \sum_{x=4}^{18} \binom{18}{x} (0,1)^x (0,9)^{18-x} \,.$$

- No entanto é mais fácil de calcular

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - \sum_{x=0}^{3} \binom{18}{x} (0,1)^x (0,9)^{18-x}$$

$$= 1 - [0,15 + 0,3 + 0,284 + 0,168] = 0,098 \,.$$

- Podemos ainda calcular

$$P(3 \leq X < 7) = \sum_{x=3}^{6} \binom{18}{x} (0,1)^x (0,9)^{18-x}$$

$$= 0,168 + 0,070 + 0,022 + 0,005 = 0,265 \,.$$

Observação:

os valores da probabilidades para algumas distribuições binomiais são apresentados no final do livro e podem ser usados para facilitar os cálculos.

Média e Variância

- Para encontrarmos a média e variância podemos analisar as tentativas independentes.
- Definimos as variáveis aleatórias

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se a i-ésima tentativa for um sucesso} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

para $i = 1, \ldots, n$.
- Então

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

- E temos que

$$E(X_i) = 1p + 0(1-p) = p \quad E(X_i^2) = 1p + 0(1-p) = p$$

logo

$$Var(X_i) = E(X_i^2) - E^2(X_i) = p - p^2 = p(1-p)\,.$$

- Um resultado (que não discutiremos aqui) diz que

$$E(X_1 + \cdots + X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n)$$

e, usando o fato da X_i's serem independentes temos que

$$Var(X_1 + \cdots + X_n) = Var(X_1) + \cdots + Var(X_n)\,.$$

- Aplicando esse resultado para o nosso caso temos

$$E(Y) = E(\sum_i X_i) = \sum_i E(X_i) = np$$

$$Var(Y) = Var(\sum_i X_i) = \sum_i Var(X_i) = np(1-p)$$

Média e Variância

Se X for uma variável aleatória binomial parâmetro p e n

$$E(X) = np \quad Var(X) = np(1-p)\,.$$

Exemplo:

- Considere novamente o exemplo dos *bits* recebidos com erros.
- X é o número de *bits* recebidos com erro.
- X tem distribuição binomial de parâmetros $p = 0,1$ e $n = 4$;
- Logo

$$E(X) = 4(0,1) = 0,4 \quad Var(X) = 4(0,1)(0,9) = 0,36\,.$$

Distribuição Geométrica

- Essa distribuição está muito relacionada com a distribuição Binomial.
- Suponha que temos uma série de tentativas de Bernoulli:
    - independentes e com probabilidade de sucesso constante (p).
- Porém as tentativas não são mais um número fixo.
- Elas são realizadas até que se encontre um sucesso.
- Exemplo: pastilhas são analisadas até que uma partícula grande seja detectada.

Exemplo:

- Considere o exemplo dos *bits* que são transmitidos por um canal digital.
- Cada *bit* é transmitido com erro com probabilidade 0,1.
- As transmissões são eventos independentes.
- Seja X o número de *bits* transmitidos até que o primeiro erro é encontrado.
- Qual a probabilidade de $X = 5$?

Solução:

- Defina:
  - E é o *bit* com erro;
  - O é o *bit* correto.
- A probabilidade de uma transmissão correta é 0,9.
- Como as tentativas são independentes

$$P(X = 5) = P(\text{OOOOE}) = (0,9)^4(0,1) = 0,066\,.$$

Observação:

- X pode ser qualquer número inteiro.
- Podemos ter também $X = 1$, caso a primeira tentativa seja um sucesso.
- Logo X pode assumir os valores $\{1, 2, 3, \dots\}$.

Distribuição Geométrica

- Considere uma série de tentativas de Bernoulli:
  - tentativas independentes;
  - probabilidade de sucesso constante.
- Seja X o número de tentativas até o primeiro sucesso.
- X é uma variável com distribuição geométrica de parâmetro $0 < p < 1$ e

$$f(x) = (1-p)^{x-1}p \quad x = 1, 2, \ldots$$

- A figura abaixo mostra exemplos de distribuição geométrica para $p = 0,1$ e $p = 0,9$.
- A altura da lina em $x - 1$ é (1-p) vezes altura de x.
- As probabilidades caem em progressão geométrica.

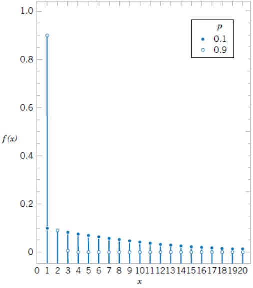


Figure 3-9 Geometric distributions for selected values of the parameter p.

Exemplo:

- Considere uma linha de produção de pastilhas.
- A probabilidade de uma pastilha conter uma partícula grande é 0,01.
- Considere que as pastilhas são independentes.
- Qual a probabilidade de termos que analisar 125 pastilhas até que uma partícula grande seja detectada?

Solução:

- Seja X o número de pastilhas analisadas até que uma partícula grande é detectada.
- X é uma variável aleatória geométrica com $p = 0,01$.
- A probabilidade requerida é

$$P(X = 125) = (0,99)^{124}(0,01) = 0,0029\,.$$

Média e Variância

- Sabemos que a média de uma variável discreta é dada por

$$E(X) = \sum_x x f(x) \, .$$

- Para o caso da distribuição geométrica temos que

$$E(X) = \sum_k kp(1-p)^{k-1} = \frac{1}{p} \, .$$

- A variância é dada por

$$Var(X) = \frac{(1-p)}{p^2}$$

Média e Variância

Se X for uma variável geométrica com parâmetro p

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad Var(X) = \frac{(1-p)}{p^2}.$$

- Quanto menor a probabilidade de sucesso:
  - mais tentativas são esperadas até o primeiro sucesso.

Exemplo:

- Considere o exemplo da transmissão de *bits*.
- Naquele caso X tem distribuição geométrica com $p = 0,1$.
- Temos então que

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,1} = 10 \quad Var(X) = \frac{(1-p)}{p^2} = \frac{0,09}{0,1^2} = 90$$

e o desvio padrão é dado por

$$\sqrt{Var(X)} = \sqrt{90} = 9,49\,.$$

Propriedade da falta de memória

- Como as tentativas são independes:
  - não importa de onde começamos contar o número de sucessos.
- A cada nova tentativa é como se o processo tivesse recomeçado.
- Dado que um sucesso ainda não ocorreu:
  - o número de tentativas adicionais necessárias até um sucesso não depende de quantas tentativas foram realizadas.
- O sistema não é desgastado.

- Veremos agora porque isso é verdade.
- Se X tem distribuição geométrica

$$P(X > x) = P(\text{ não ocorrer nenhum sucesso até a tentativa } x)$$

$$= (1-p)^x \ .$$

- Temos então que se $k > 0$

$$P(X > (x+k)|X > x) = \frac{(1-p)^{x+k}}{(1-p)^x} = (1-p)^k = P(X > k).$$

- Se eu já observei x tentativas sem sucesso.
- A probabilidade de observar $x + k$ tentativas sem sucesso:
  - é somente a probabilidade de observar mais k tentativas sem sucesso.

Exemplo:

- Considere o exemplo dos *bits* transmitidos com erro.
- 100 *bits* foram transmitidos sem erro.
- A probabilidade do *bit* 106 ser transmitido com erro
    - é a mesma do sexto *bit* ser transmitido com erro caso o processo seja reiniciado.
- O número médio de *bits* transmitido até o próximo erro é igual a 10.
- O mesmo número médio esperado até o primeiro erro.