Variáveis Aleatórias Discretas e Distribuição de Probabilidades - parte IV

Marcos Oliveira Prates

2012/02

Objetivos

Ao final deste capítulo você deve ser capaz de:

- Ententer suposições para cada uma das distribuições discretas apresentadas.
- Selecionar a distribuição discreta em situações específicas.
- Calcular probabilidades, médias e variâncias para as distribuições discretas apresentadas.

Distribuição Poisson

- Modela a probabilidade de eventos ocorrendo em um período fixo de tempo.
- Exemplo: quantas chamadas chegam a uma central telefônica ao longo de um dia.
- Considera-se que:
  - os eventos ocorrem com uma média conhecida;
  - a ocorrência de eventos em intervalos disjuntos são independentes.

Poisson como aproximação da Binomial

- Seja X uma variável com distribuição Binomial(n,p).
- Quando n é suficientemente grande e p é bem pequeno, defina
$$\lambda = np\,.$$
- A função de probabilidade de X pode ser aproximada por
$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}\,.$$
- Essa é a função de probabilidade da Poisson.

Exemplo:

- Considere a transmissão de *n bits* através de um canal digital.
- Seja X o número de *bits* transmitidos com erro.
- Considerando que a probabilidade de erro (p) é constante e as transmissões são independentes:
  - X tem distribuição Binomial(n,p).
  - Logo
    $$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$
    definindo $\lambda = np$ temos que $p = \lambda/n$ logo
    $$P(X = x) = \binom{n}{x} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} .$$
  - Suponha agora que:
    - n aumenta;
    - p diminui;
    - np é constante.

Exemplo: (continuação)

- É possível mostrar que

$$\binom{n}{x}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \to \frac{\lambda^x}{x!} \quad \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x} \to 1 \quad \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \to e^{-\lambda}$$

- Dessa forma

$$\lim_{n\to\infty} P(X=x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

para $x = 0, 1, 2, \ldots$

- Como o número total de *bits* transmitido cresce indefinidamente:
  - X pode assumir qualquer valor maior ou igual a zero.

Exemplo:

- Falhas ocorrem ao acaso ao longo do comprimento de um fio de cobre.
- Seja X o número de falhas em um comprimento de L milímetros.
- O número médio de falhas em L milímetros é λ.
- Vamos encontrar a distribuição de X.

Exemplo: (continuação)

- Parta o fio em n subintervalos.
- Se o intervalo é bem pequeno:
  - a probabilidade de duas falhas no mesmo intervalo é bem próxima de zero.
- Como as falhas não tem probabilidade maior de ocorrer em uma parte do fio:
  - a probabilidade de cada subintervalo conter uma falha é constante p.
- Supomos que a probabilidade de um intervalo conter uma falha é independente dos demais.
- X tem distribuição Binomial(n,p).

- Temos que
$$E(X) = \lambda = np$$
de onde obtemos que
$$p = \lambda/n\,.$$
- A probabilidade de que um intervalo contenha uma falha é $p = \lambda/n$.
- Se os intervalos são muito pequenos:
  - n é grande e p é pequeno.
- E portanto X tem distribuição Poisson com média λ.

- No exemplo anterior dividimos o comprimento de um fio.
- Podemos dividir intervalo de tempo, área, volume.
- A distribuição Poisson é usada para modelar eventos em:
  - determinado intervalo de tempo $\Rightarrow$ chamadas telefônicas que chegam em uma centram em um dia;
  - em um determinada área $\Rightarrow$ falhas em rolos de tecido;
  - em um determinado volume $\Rightarrow$ número de bactérias em um litro de água.

Processo de Poisson

- Considere um intervalo de números reais.
- Eventos ocorrem ao acaso ao longo de todo intervalo.
- Dividimos o intervalo em subintervalos bem pequenos.
- Esses intervalos são tais que
  a) a probabilidade de mais de um evento em cada subintervalo é zero;
  b) a probabilidade de um evento em um intervalo é a mesma para todos eles;
  c) essa probabilidade é proporcional ao tamanho do intervalo;
  d) a ocorrência do evento em cada intervalo é independente dos demais.
- Esse experimento é chamado **Processo de Poisson**.

- A variável X que conta o número de eventos no intervalo:
  - é uma **variável aleatória de Poisson** de parâmetro $\lambda > 0$.
- A função de probabilidade de X é dada por

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

para $x = 0, 1, 2, \ldots$

- A soma das probabilidade é um pois

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1\,.$$

(expansão de e^x em Série de Taylor.)

Exemplos de distribuições de Poisson

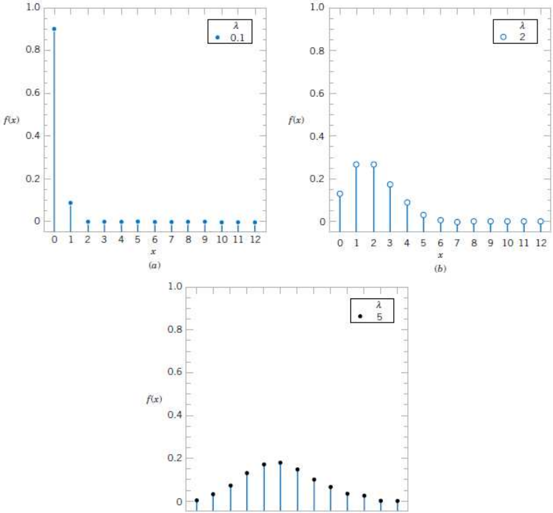

Figure 3-14 Poisson distributions for selected values of the parameters.

Observação:

- É importante usar medidas consistentes.
- O seguinte exemplo ilustra conversão das unidades.
- Por exemplo, as seguintes medidas são equivalentes:
  - número médio de falhas por milímetro é 3,4;
  - o número médio de falhas em 10 milímetros é 34;
  - o número médio de falhas em 100 milímetros é 340.
- Se X representa o número de contagens em um intervalo.
- A média deve ser igual ao número esperado de eventos no mesmo comprimento de intervalo.

Exemplo:

- Considere o exemplo do fio de cobre.
- Suponha que o número de falhas segue uma distribuição Poisson.
- Suponha que espera-se 2,3 falhas a cada milímetro do fio.
- Seja X o número de falhas **em um mílimetro do fio**.
- Então $E(X) = 2,3$.
- Qual a probabilidade de observarmos 2 falhas em um mílimetro do fio?

$$P(X = 2) = \frac{e^{-2,3}(2,3)^2}{2!} = 0,265\,.$$

Exemplo: (continuação)

- Qual a probabilidade de 10 falhas **em 5 milímetros** de fio?
- Seja X o número de falhas em 5 milímetros de fio.
- X tem distribuição Poisson com

$$E(X) = (5)(2,3) = 11,5 \text{ falhas em 5 milímetros}.$$

- Logo

$$P(X = 10) = e^{-11,5} \frac{11,5^{10}}{10!} = 0,113\,.$$

Exemplo: **(continuação)**

- Qual a probabilidade de termos no mínimo uma falha em 2 milímetros de fio?
- Seja X o número de falhas em 2 milímetros de fio.
- X tem distribuição Poisson com

$$E(X) = (2)(2,3) = 4,6 \text{ falhas em 2 milímetros}.$$

- Logo

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-4,6} = 0,9899.$$

Exemplo:

- Considere um processo de fabricação de discos ópticos.
- O número de partículas de contaminação que ocorrem em um disco óptico tem distribuição Poisson.
- O número médio de partículas de contaminação com cm^2 é 0,1.
- A área do disco é 100 cm^2.
- Qual a probabilidade de 12 partículas ocorrerem na área de um disco?

Exemplo: **(solução)**

- Seja X o número de partículas na área de um disco.
- Como o número médio de partículas por cm^2 é 0,1 temos

$$E(X) = (100)(0,1) = 10 \text{ partículas.}$$

- Logo

$$P(X = 12) = \frac{e^{-10}10^{12}}{12!} = 0,095\,.$$

- A probabilidade de nenhuma partícula ocorrer na área do disco é

$$P(X = 0) = e^{-10} = 4,54^{-5}\,.$$

Exemplo: (continuação)

- Determine a probabilidade de 12 ou menos partículas ocorrerem na área do disco?

$$P(X \leq 12) = P(X = 0) + P(X = 1) + \cdots + P(X = 12)$$

$$= \sum_{x=0}^{12} \frac{e^{-10}10^x}{x!} = 0,792.$$

Média e Variância

1. Se X é uma variável aleatória Poisson com parâmetro λ então

$$E(X) = \lambda \qquad Var(X) = \lambda$$

Observações:

- A média e variância de uma variável Poisson são iguais.
- Exemplo: se a contagem de partículas por cm^2 segue uma Poisson de parâmetro 25:
  - o número médio de partículas por cm^2 é 25;
  - a variância é também 25;
  - o desvio padrão é 5.
- Se a variância nos dados é muito maior que sua média:
  - a distribuição de Poisson não é um bom modelo.