Variáveis Aleatórias Contínuas e Distribuição de Probabilidades - parte I

Marcos Oliveira Prates

2012/02

Objetivos

Ao final deste capítulo você deve ser capaz de:

- Determinar probabilidades a partir de funções densidades de probabilidade.
- Determinar probabilidades a partir de funções cumulativas.
- Determinar funções de distribuição cumulativa a partir de funções densidade de probabilidade e o contrário.
- Calcular médias e variâncias de variáveis aleatórias contínuas.

Exemplo:

- Medimos a corrente de um fio.
- Os resultados podem diferir se medirmos em dias diferentes.
- Causas de flutuações:
  - mudanças na temperatura;
  - impureza na composição do fio;
  - oscilação na fonte de corrente;
  - entre outras.

- A corrente no fio pode ser representada por uma variável aleatória X.
- É razoável modelar sua faixa de valores possíveis por um intervalo.
- Esse intervalo pode ser finito ou infinito.
- Os possíveis valores tomados por X não é mais contável.
- X assume valores em um intervalo contínuo.
- Dizemos assim que X é uma variável **contínua**.

- Vamos ver vários exemplos de distribuições contínuas.
- São usadas em diferentes aplicações.
- Vamos fazer cálculos de probabilidades, média e variância para cada uma delas.

Distribuições de Probabilidade e Funções Densidades de Probabilidade

- A **função densidade de probabilidade** $f(x)$:
  - descreve a distribuição de uma **variável aleatória contínua** X.
- Se um intervalo tem grande probabilidade de conter X:
  - $f(x)$ apresenta valores altos.
- A probabilidade de X estar entre a e b é determinada pela integral de $f(x)$ de a até b.

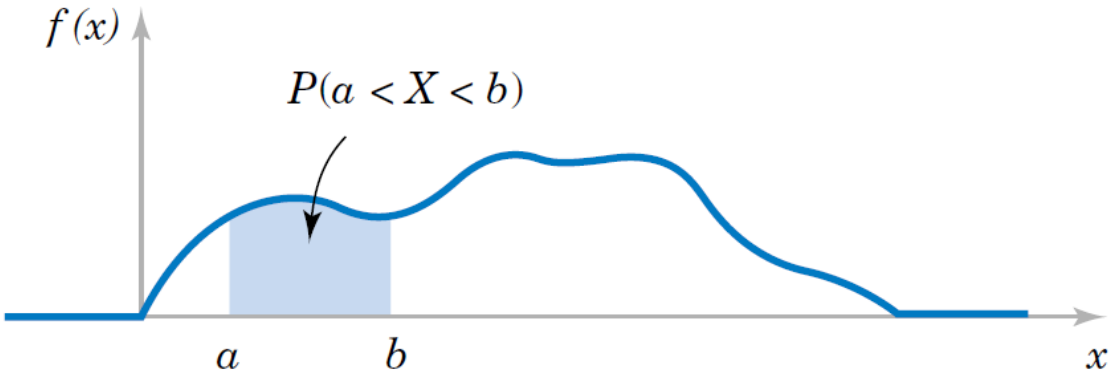


Figure 4-2 Probability determined from the area under $f(x)$.

Função Densidade de Probabilidade

Seja X uma variável contínua.
Uma **função de densidade de probabilidade** é uma função tal que

1. $f(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
3. $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$=área abaixo de $f(x)$ entre a e b.

- Essa função descreve as probabilidades associadas a uma variável aleatória.
- Como é não negativa e

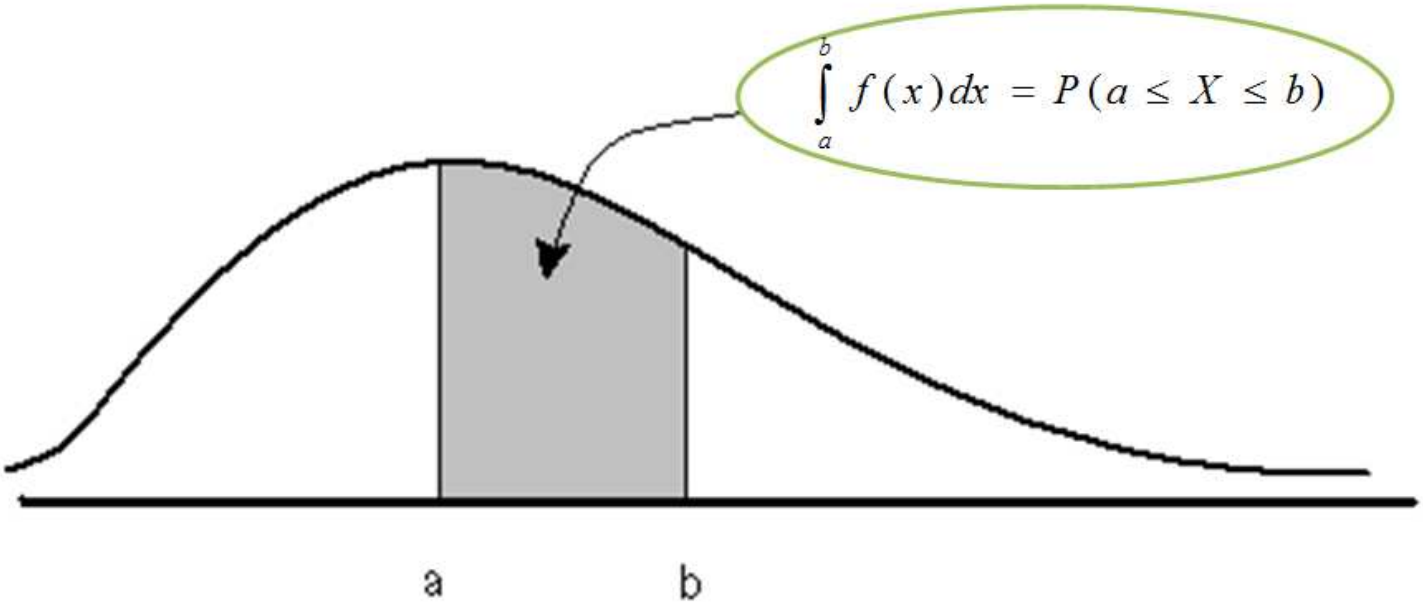
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

então

$$0 \leq P(a \leq X \leq b) \leq 1 \, .$$

- Ela é zero para valores de x que não podem ocorrer.
- Considera igual a zero para valores não especificados.

- A $f(x)$ é usada para calcular uma área.
- Essa área representa a probabilidade de X estar no intervalo $[a, b]$.



Exemplo:

- Considere o exemplo da corrente no fio.
- Queremos saber a probabilidade de X estar entre

$$[14mA, 15mA] .$$

- Essa probabilidade é a integral de $f(x)$ entre 14 e 15.
- Devemos escolher $f(x)$ de maneira apropriada.
- Assim podemos calcular as probabilidades associadas a qualquer intervalo.

- Em uma função contínua sabemos que a área abaixo do ponto é zero.
- Como $f(x)$ é usada para calcular a área e, portanto, a probabilidade temos que, para qualquer x

$$P(X = x) = 0\,.$$

- Isso pode fazer parecer que o modelo é inútil.

- Porém se dizemos que a corrente é 14,47 miliampéres esse valor é arredondado.
- A corrente está na verdade na faixa

$$[14,465 \leq x \leq 14,475].$$

- Todos os valores nesse intervalo levam à medida 14,47.
- A probabilidade de $X = 14,47$ não é zero.
- É a probabilidade de X estar no intervalo

$$P(X \in [14,465; 14,475]).$$

- Como a probabilidade de um ponto é zero.
- Não precisamos distinguir desigualdades como

$$< \quad \text{ou} \quad \leq .$$

Se X é uma variável contínua.
Para qualquer x_1 e x_2

$$P(x_1 \leq X \leq x_2)$$

$$= P(x_1 < X \leq x_2)$$

$$= P(x_1 \leq X < x_2)$$

$$= P(x_1 < X < x_2)\,.$$

Exemplo:

- Seja X a corrente de um fio de cobre.
- A faixa de valores de X é $[0, 20mA]$.
- A função densidade de probabilidade de X é

$$f(x) = 0,05 \quad \text{para} \quad 0 \leq x \leq 20.$$

- Qual a probabilidade da corrente ser menor que 10 miliampéres?

Exemplo: (solução)

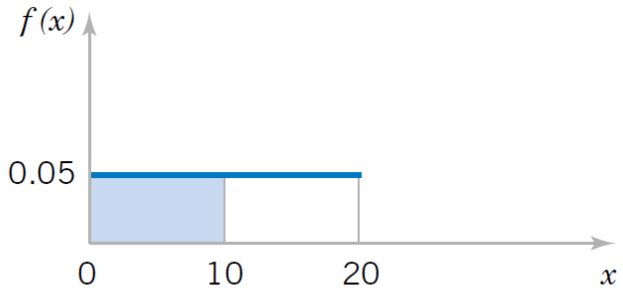


Figure 4-4 Probability density function for Example 4-1.

- $f(x)$ é zero para os valores que ela não foi definida.
- A probabilidade requerida é

$$P(X < 10) = \int_0^{10} f(x)dx = \int_0^{10} 0,05dx = (10)(0,05) = 0,5.$$

- Outro exemplo

$$P(5 < X < 20) = \int_5^{20} 0,05dx = 15(0,05) = 0,75\,.$$

Exemplo:

- Seja X o diâmetro de um orifício.
- O diâmetro alvo é 12,5.
- Distúrbios aleatórios resultam em diâmetros maiores.
- X pode ser modelada pela função densidade

$$f(x) = 20e^{-20(x-12,5)} \quad \text{para} \quad x \geq 12,5.$$

- Descartamos todas peças com diâmetro maior que 12,6 mm.
- Qual a proporção de peças descartadas?

Exemplo: (solução)

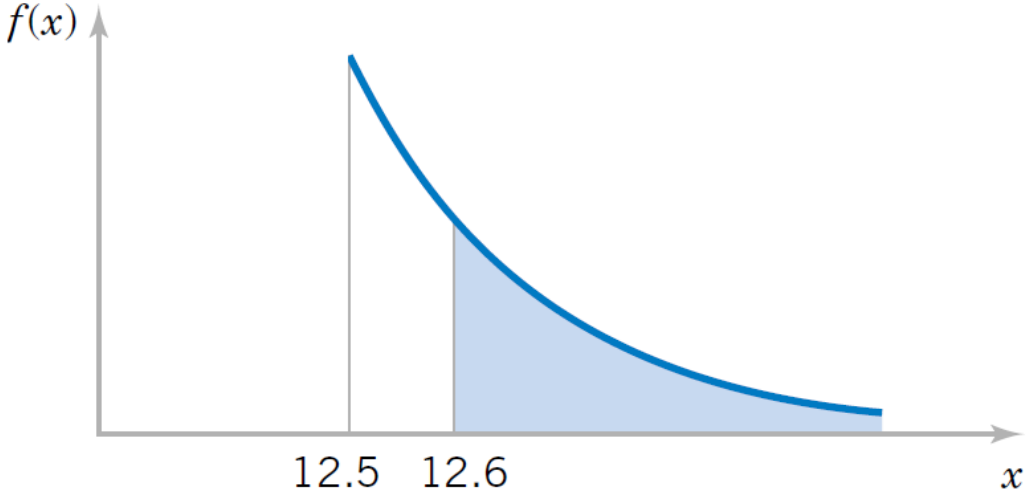


Figure 4-5 Probability density function for Example 4-2.

- A função densidade de probabilidade de X é mostrada abaixo
- A probabilidade requerida é

$$P(X > 12,60) = 0,135\,.$$

$$P(X > 12,60) = \int_{12,60}^{\infty} 20e^{-20(x-12,5)} = -e^{-20(x-12,5)}\Big|_{12,60}^{\infty}$$

$$e^{-20(12,60-12,5)} = e^{-2} = 0,135\,.$$

Exemplo: (continuação)

- Qual a proporção de peças entre 12,5 e 12,6 mm?

$$P(12,5 < X < 12,6) = 0,865\,.$$

(fazer no quadro)

- Como a área total é um

$$P(12,5 < X < 12,6) = 1 - P(X > 12,60) = 1 - 0,135 = 0,865.$$

Funções de Distribuição Cumulativa

- Um modo alternativo de descrever as variáveis.
- Assim como no caso discreto.

Função de Distribuição Acumulada

A **função de distribuição cumulativa** de uma variável contínua X é

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

para $-\infty < x < \infty$.

- Ela está definida para todos números reais.

Exemplo:

- Considere o exemplo da corrente do fio.
- Vimos que a função densidade de X é

$$f(x) = 0,05 \quad \text{para} \quad 0 \leq x \leq 20.$$

- Então

$$F(x) = P(X \leq x) = 0 \quad \text{para} \quad x < 0$$

e

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x f(u)du = (0,05)x \quad \text{para} \quad 0 \leq x < 20$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x f(u)du = 1 \quad \text{para} \quad x \geq 20\,.$$

Exemplo: (continuação)

- Temos então que

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ 0,05x & \text{se} \quad 0 \leq x < 20 \\ 1 & \text{se} \quad x \geq 20. \end{cases}$$

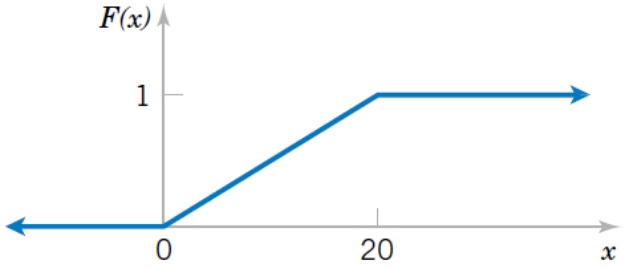


Figure 4-6 Cumulative distribution

Observação

- Qualquer $<$ pode ser trocado por $\leq$.
- $F(x)$ pode ser definida como 0 ou $0,05x$ em $x = 0$.
- Pode ser definida como $0,05x$ ou 1 em $x = 20$.

Exemplo:

- Considere novamente o exemplo do diâmetro do orifício.
- A $F(x)$ consiste em duas expressões

$$F(x) = 0 \quad \text{para} \quad x < 12,5$$

e para $x \geq 12,5$

$$F(x) = \int_{12,5}^{x} 20e^{-20(u-12,5)}du = 1 - e^{-20(x-12,5)} .$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 12,5 \\ 1 - e^{-20(x-12,5)} & \text{se} \quad x \geq 12,5. \end{cases}$$

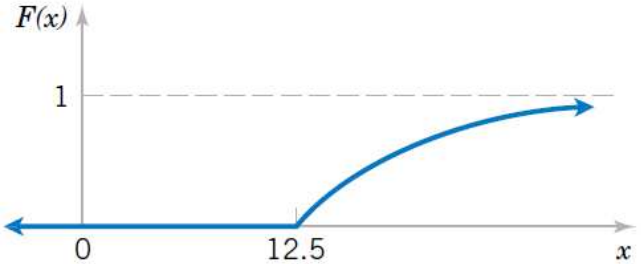


Figure 4-7 Cumulative distribution function for Example 4-4.

- Podemos obter a função de densidade de probabilidade a partir da função de distribuição cumulativa.
- Do Teorema Fundamental do Cálculo

$$\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x} f(u)du = f(x)\,.$$

- Então

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

desde que a derivada exista.

Exemplo:

- O tempo (milissegundos) até que uma reação química seja completa é aproximado pela função de distribuição cumulativa

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ 1 - e^{-0{,}01x} & \text{se} \quad x \geq 0\,. \end{cases}$$

- Determina a função densidade de probabilidade de X.
- Qual a proporção de reações completas dentro de 200 milissegundos?

Exemplo: (solução)

- Derivando a função de distribuição cumulativa temos que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ 0,01e^{-0,01x} & \text{se} \quad x \geq 0\,. \end{cases}$$

- A probabilidade da reação se completar em 200 milissegundos é

$$P(X < 200) = P(X \leq 200) = F(200) = 1 - e^{-2} = 0,8647.$$

Média e Variância de uma variável contínua

- A média e variância são definidas de forma semelhante ao caso discreto.
- Substituímos a soma por uma integral.
- A média pode ser vista como o centro de massa da viga.

Média de variância

- Seja X uma variável contínua.
- Sua função densidade é $f(x)$.
- A **média** ou **valor esperado** de X é

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \,.$$

- A **variância** de X é

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - (E(X))^2 \,.$$

- O **desvio padrão** de X é

$$\sqrt{V(X)} \,.$$

Exemplo:

- Considere o exemplo da corrente no fio de cobre.
- A média de X é

$$E(X) = \int_0^{20} xf(x)dx = \frac{0,05x^2}{2}\Big|_0^{20} = 10$$

- A variância de X é

$$V(X) = \int_0^{20} (x-10)^2 f(x)dx = 33,33\,.$$

(fazer no quadro)

- Podemos calcular o valor esperado de uma função $h(X)$.

Valor Esperado de uma função de Variável Aleatória

Se X é uma variável contínua com função densidade de probabilidade $f(x)$

$$E[h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)dx \ .$$

Exemplo:

- Considere o exemplo da corrente no fio.
- Calcule o valor esperado de X^2.

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = 133,33.$$

(fazer no quadro)

Observação:

- note que $E(X^2) \neq (E(X))^2$.
- se $h(x) = ax + b$ então $E(h(X)) = aE(X) + b$

$$E(X^2) = \int_0^{20} x^2 f(x)dx = 0,05\frac{x^3}{3}\Big|_0^{20}$$

$$= 0,05\frac{20^3}{3} = 133,33\,.$$

Exemplo:

- Considere o exemplo do diâmetro do orifício.
- Temos que

$$E(X) = \int_{12,5}^{\infty} xf(x)dx = \int_{12,5}^{\infty} x20e^{-20(x-12,5)}dx = 12,55$$

(fazer no quadro)

- Para variância temos que

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - (E(X))^2 = 0,0025\,.$$

(fazer no quadro)