

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

## Tópicos em Percolação de Longo Alcance

Roger William Câmara Silva

Belo Horizonte

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

## Tópicos em Percolação de Longo Alcance

**Roger William Câmara Silva**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Doutor em Estatística.

Orientador: **Bernardo Nunes Borges de Lima**

Co-orientador: **Rémy de Paiva Sanchis**

Belo Horizonte

*A minha amada  
esposa Sara.  
Aos meus pais,  
Elisvaldo Martins  
e Ana Câmara.  
A minha querida  
irmã Livia.*

---

# Agradecimentos

Ao fim deste trabalho, agradeço:

A Deus, por me dar a oportunidade de desenvolver esse trabalho, por estar ao meu lado renovando minhas forças e pela benção da vida.

Aos professores Bernardo Nunes Borges de Lima e Rémy de Paiva Sanchis pela orientação. É impossível mensurar a contribuição de vocês para o meu desenvolvimento acadêmico. Valeu pelas horas que passamos discutindo matemática!

Aos professores Gregório Saravia Atuncar e Michel Spira pelo incentivo e também aos colegas e funcionários do Departamento de Estatística da UFMG. Agradeço também à FAPEMIG pelo apoio financeiro.

À banca examinadora, prof. Vladas Sidoravicius (IMPA), prof<sup>a</sup>. Maria Eulália Vares (CBPF), prof. Enrique Andjel (Université de Provence), prof. Adrian Pablo Hinojosa Luna (UFMG) e prof<sup>a</sup>. Denise Duarte Scarpa (UFMG). Obrigado por atenderem ao convite.

Aos verdadeiros amigos que, mesmo não verbalizando isso, torceram por mim incondicionalmente e vibraram comigo em cada conquista. Obrigado pela amizade e paciência que vocês me ofereceram ao longo dos últimos 10 anos de academia.

Ao Ramon pela ajuda com os desenhos que aparecem nesse trabalho. Muito obrigado pelas horas gastas comigo nessa tarefa.

À minha irmã pelo amor, carinho e torcida.

Aos meus amados pais, não sei como agradecer. Qualquer palavra colocada aqui como forma de agradecimento seria insuficiente para expressar a real contribuição de vocês para que isso acontecesse. A partir de agora, chamarão seu filho de doutor, mas eu sei que o diploma é na verdade de vocês. Não por conhecimentos estatísticos, matemáticos ou probabilísticos, mas por conhecimento de vida e do que realmente significam as palavras amor, doação e sacrifício. A vocês, minha eterna gratidão!

À minha amada esposa Sara, pela compreensão em momentos delicados. Por abrir mão de tanta coisa para que isso acontecesse. Por sonhar junto comigo e contribuir para a realização do sonho. Pelo amor, companheirismo, paciência, torcida e principalmente pela dedicação que me ofereceu gratuitamente. Essa conquista também é sua!

---

# Resumo

Nesta tese estudamos alguns aspectos de um modelo de percolação de longo alcance em  $\mathcal{Z}^d$ ,  $d \geq 2$ . Esse modelo é uma variação do modelo de percolação independente de sítios em  $\mathcal{Z}^d$ , onde cada sítio está ocupado ou vazio de maneira independente com probabilidade  $p$  e  $1 - p$  respectivamente,  $p \in [0, 1]$ . Num primeiro momento, consideramos o problema de percolação de palavras no grafo  $\mathcal{L}_K^d = (\mathbb{Z}^d, \cup_{n=1}^K \mathcal{E}_n)$ , onde  $\mathcal{E}_n$  é o conjunto de elos paralelos a algum eixo coordenado e de comprimento  $n \in \mathbb{N}$  e uma palavra é um elemento  $\xi \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Obtemos os seguintes resultados:

- $\forall p \in (0, 1)$ , existe uma constante  $K = K(p)$ , tal que todas as palavras são vistas em  $\mathcal{L}_K^d$  quase certamente.
- Obtemos a escala correta da constante  $K(p)$  quando  $p$  vai para zero, a fim de que todas as palavras sejam vistas quase certamente.
- Obtemos um resultado parcial para a escala da constante  $K(p)$  quando  $p$  vai para zero, quando o evento de interesse é ver *quase todas* as palavras.

Em um segundo momento, estudamos o comportamento da probabilidade de percolação  $\theta^{\mathcal{G}^k}(p)$  e do ponto crítico  $p_c(\mathcal{G}^k)$  em um modelo de percolação independente de sítios em  $\mathcal{G}^k = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_k)$ . Obtemos o seguinte resultado:

- $\lim_{k \rightarrow \infty} p_c(\mathcal{G}^k) = p_c(\mathcal{Z}^{2d})$ .

O resultado acima é generalizado para modelos cujos elos de longo alcance tem vários comprimentos.

---

---

# Abstract

In this work we study some aspects of a long range percolation model in  $\mathcal{Z}^d$ ,  $d \geq 2$ . This model is a variation of the independent site percolation model in  $\mathcal{Z}^d$ , where each site is independently occupied or vacant with probability  $p$  or  $1 - p$  respectively,  $p \in [0, 1]$ . Firstly, we consider the problem of percolation of words in the graph  $\mathcal{L}_K^d = (\mathbb{Z}^d, \cup_{n=1}^K \mathcal{E}_n)$ , where  $\mathcal{E}_n$  is the set of edges of length  $n \in \mathbb{N}$  parallel to some coordinate axis and a word is just an element  $\xi \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . We obtain the following results:

- $\forall p \in (0, 1)$ , there exists a constant  $K = K(p)$ , such that all words can be seen on  $\mathcal{L}_K^d$  almost surely.
- We obtain the scaling behaviour of  $K(p)$  when  $p$  goes to zero, so that all words can be seen almost surely.
- We obtain a partial result for the scaling behaviour of  $K(p)$  when  $p$  goes to zero, when the event of interest is to see *almost all* words instead of all words.

Later, we study the behaviour of the percolation probability  $\theta^{\mathcal{G}^k}(p)$  and the critical point  $p_c(\mathcal{G}^k)$  in an independent site percolation model in  $\mathcal{G}^k = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_k)$ . We obtain the following result:

- $\lim_{k \rightarrow \infty} p_c(\mathcal{G}^k) = p_c(\mathcal{Z}^{2d})$ .

The above result is generalized for models whose long range bonds have several lengths.

---

# Introdução

Um dos modelos probabilísticos mais interessantes é o de percolação independente. Esse modelo é tido por muitos como uma fonte de problemas interessantes, mas não raramente de difícil solução. Introduzido em 1957 por Broadbent e Hammersley, tinha como objetivo descrever matematicamente o deslocamento de um fluido por um meio poroso.

Dado um grafo  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ , podemos definir um modelo de percolação independente de sítios em  $\mathcal{G}$ , atribuindo a cada vértice  $v \in \mathcal{V}$  dois estados distintos, ocupado e vazio. Esses estados são atribuídos de maneira independente segundo uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli de parâmetro  $p$ . Podemos também atribuir aos possíveis estados, ocupado e vazio, os valores numéricos 1 e 0 respectivamente. Temos assim o espaço amostral  $\Omega = \{0, 1\}^{\mathcal{V}}$  e podemos definir uma medida produto em  $\Omega$ , que denotaremos por  $P_p$ . Esse modelo e algumas propriedades são descritos formalmente no Capítulo 1.

Várias variantes desse modelo foram propostas ao longo do tempo e vários pesquisadores foram atraídos para a área, que teve boa parte dos seus problemas mais intrigantes resolvidos na década de 80. Nessa tese versaremos sobre uma dessas variantes, a saber um modelo de percolação de longo alcance. Este modelo é descrito detalhadamente na Seção 1.3. Os Capítulos 2 e 3 são as contribuições originais desta tese e são os temas dos trabalhos [20] e [21], respectivamente.

No Capítulo 2 estudaremos o problema de percolação de palavras em modelos de longo alcance. O problema de percolação de palavras foi introduzido por Benjamini e Kesten em [3], trabalho em que os autores apresentam vários resultados e exemplos interessantes. Posteriormente, vários outros autores trabalharam nesse problema em contextos diferentes.

Uma palavra é uma sequência binária infinita  $\xi \in \Xi = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Por vezes consideraremos também palavras finitas  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Nesse contexto, fixada uma configuração



$\omega \in \Omega$ , o objetivo é entender em que circunstâncias o conjunto de palavras que são vistas ao longo de algum caminho em  $\mathcal{G}$  na configuração  $\omega$  é grande em algum sentido.

Considere o grafo  $\mathcal{Z}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{E})$ , onde  $\mathcal{E}$  é o conjunto de elos entre os vizinhos mais próximos de  $\mathbb{Z}^d$ . Em [3], os autores definem  $S_v(\omega)$ , o conjunto das palavras que são vistas na configuração  $\omega$  a partir de  $v \in \mathcal{V}$  ao longo de algum caminho auto-evitante, ou seja, uma caminho sem interseções e também  $S_\infty(\omega) = \bigcup_{v \in \mathcal{V}} S_v(\omega)$ , o conjunto das palavras que são vistas na configuração  $\omega$  a partir de algum vértice ao longo de algum caminho auto-evitante. Nesse mesmo trabalho eles mostram, entre outros resultados, que

a) Se  $d \geq 10$ , temos

$$P_{\frac{1}{2}}\{\omega \in \Omega : S_\infty = \Xi \text{ em } \mathcal{Z}^d\} = 1.$$

b) Se  $d \geq 40$ , temos

$$P_{\frac{1}{2}}\left\{\bigcup_{v \in \mathbb{Z}^d} \{\omega \in \Omega : S_v(\omega) = \Xi \text{ em } \mathcal{Z}^d\}\right\} = 1.$$

Observe que em b), todas as palavras são vistas a partir de um único vértice (que depende da configuração) quase certamente.

Um dos nossos objetivos nessa tese é estudar o problema de percolação de palavras aplicado a modelos de longo alcance. Em particular, estudaremos o problema de percolação de palavras em  $\mathbb{Z}^d$ , considerando não somente conexões entre vizinhos mais próximos, mas também conexões de longo alcance. Para isso, seja  $\mathcal{L}_K^d = (\mathbb{Z}^d, \bigcup_{n=1}^K \mathcal{E}_n)$ , onde  $\mathcal{E}_n$  é o conjunto de elos paralelos a algum eixo coordenado e de comprimento  $n \in \mathbb{N}$ . O primeiro teorema que provaremos é o seguinte:

**Teorema 1** *Para todo  $p \in (0, 1)$ , existe um inteiro positivo  $K = K(p)$ , tal que*

$$P_p\{\omega \in \Omega : S_0(\omega) = \Xi \text{ em } \mathcal{L}_K^d\} > 0$$

*ou equivalentemente*

$$P_p\left\{\bigcup_{v \in \mathbb{Z}^d} \{\omega \in \Omega : S_v(\omega) = \Xi \text{ em } \mathcal{L}_K^d\}\right\} = 1.$$

Para demonstrar esse resultado, usaremos uma técnica de renormalização. Observe que esse teorema não contém informação a respeito do tamanho necessário da constante

$K(p)$  para que todas as palavras sejam vistas quase certamente. O segundo resultado que estabeleceremos resolve esse problema e fornece o comportamento assintótico de  $K(p)$  quando  $p$  vai para zero.

**Teorema 2** *Existe uma constante  $\lambda_0 \in (\frac{1}{2d}, -6 \ln(1 - p_c(\mathcal{Z}^d)))$  tal que se  $K(p) = \lfloor \frac{\lambda}{p} \rfloor$ , então*

$$\lim_{p \rightarrow 0} P_p \left\{ \bigcup_{v \in \mathbb{Z}^d} \{\omega \in \Omega : S_v(\omega) = \Xi \text{ em } \mathcal{L}_K^d\} \right\} = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda < \lambda_0, \\ 1 & \text{se } \lambda > \lambda_0. \end{cases}$$

A demonstração desse teorema é feita em duas partes. Em primeiro lugar, mostraremos que se  $\lambda_0$  é suficientemente grande e  $p^*$  é suficientemente pequeno, então a probabilidade acima é igual a 1,  $\forall p \in (0, p^*)$ . Esse é o conteúdo do resultado a seguir.

**Lema 1** *Se  $K = K(p) = 2 \lfloor \frac{\lambda}{p} \rfloor$ , então para  $\lambda > -3 \ln(1 - p_c(\mathcal{Z}^d))$  temos que*

$$\lim_{p \rightarrow 0} P_p \left\{ \bigcup_{v \in \mathbb{Z}^d} \{\omega \in \Omega : S_v(\omega) = \Xi \text{ em } \mathcal{L}_K^d\} \right\} = 1.$$

Em seguida mostraremos o seguinte lema:

**Lema 2** *Se  $K = K(p) = \lfloor \frac{\lambda}{p} \rfloor$  com  $\lambda < \frac{1}{2d}$ , então*

$$\lim_{p \rightarrow 0} P_p \left\{ \bigcup_{v \in \mathbb{Z}^d} \{\omega \in \Omega : S_v(\omega) = \Xi \text{ em } \mathcal{L}_K^d\} \right\} = 0.$$

Combinando os Lemas 1 e 2, obtemos a demonstração do Teorema 2.

Seja  $\vec{1} = (1, 1, \dots)$ . Com uma pequena modificação na demonstração do Teorema 2, obtemos o comportamento assintótico de  $K(p)$ , quando  $p$  vai para zero, quando o evento em questão é  $\{\omega \in \Omega : \vec{1} \text{ é vista em } \omega \text{ a partir de algum } v\}$ .

**Corolário 1** *Existe uma constante  $\lambda_0 \in (\frac{1}{2d}, -2 \ln(1 - p_c(\mathcal{Z}^d)))$  tal que se  $K(p) = \lfloor \frac{\lambda}{p} \rfloor$ , então*

$$\lim_{p \rightarrow 0} P_p \left\{ \bigcup_{v \in \mathbb{Z}^d} \{\omega \in \Omega : \vec{1} \text{ é vista em } \omega \text{ em } \mathcal{L}_K^d \text{ a partir de } v\} \right\} = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda < \lambda_0 \\ 1 & \text{se } \lambda > \lambda_0. \end{cases}$$

Mudando um pouco a direção em nossa discussão, observe que mesmo que todas as palavras sejam vistas em um grafo  $\mathcal{G}$  com probabilidade 0, é possível que quase todas palavras sejam vistas quase certamente. Aqui quase todas se refere à medida  $\mu_\alpha = \prod_{i=1}^{\infty} \nu_i$  em  $\Xi$ , onde para cada  $i$

$$\nu_i(1) = 1 - \nu_i(0) = \alpha, \text{ para algum } 0 < \alpha < 1.$$

Note que sob  $\nu$  as  $\xi_i$  são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição de Bernoulli com parâmetro  $\alpha$ .

Nosso objetivo era obter um teorema similar ao Teorema 2. Entretanto, tivemos sucesso parcial nessa direção, obtendo o seguinte resultado:

**Teorema 3** *Seja  $0 < \alpha < 1$ . Então, para todo  $\epsilon > 0$  e  $K = K(p) < \frac{1}{2d} \frac{1}{p^{\alpha-\epsilon}}$ , temos*

$$\lim_{p \rightarrow 0} P_p \left\{ \bigcup_{v \in \mathbb{Z}^d} \{ \omega \in \Omega : \mu_\alpha(S_v(\omega)) = 1 \text{ em } \mathcal{L}_K^d \} \right\} = 0.$$

No Capítulo 3, que se baseia em [21], estudaremos o comportamento da probabilidade de percolação  $\theta^{\mathcal{G}^k}(p)$  e do ponto crítico  $p_c(\mathcal{G}^k)$  em um modelo de percolação independente de sítios em  $\mathcal{G}^k = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_k)$ . De fato, consideraremos esse problema num contexto mais geral, que pode ser descrito como a seguir.

Seja  $\vec{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ ,  $k_i \in \{2, 3, \dots\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Considere o grafo

$$\mathcal{G}^{\vec{k}} = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{E}_1 \cup (\cup_{i=1}^n \mathcal{E}_{k_1 \times \dots \times k_i})),$$

isto é,  $\mathcal{G}^{\vec{k}}$  é  $\mathbb{Z}^d$  decorado com todos elos de comprimento 1,  $k_1, k_1 \times k_2, \dots, k_1 \times k_2 \times \dots \times k_n$  paralelos a algum eixo coordenado. Quando  $n = 1$ , temos o grafo  $\mathcal{G}^k$  mencionado anteriormente.

O resultado que obtemos diz respeito ao ponto crítico de um modelo de percolação independente em  $\mathcal{G}^{\vec{k}}$ . Em particular, mostramos que o ponto crítico desse modelo converge, quando  $k_i \rightarrow \infty, \forall i = 1, \dots, n$ , para o ponto crítico de um modelo de percolação independente em  $\mathbb{Z}^{d(n+1)}$ . Formalmente, mostraremos o seguinte resultado:

**Teorema 4**

$$\lim_{k_i \rightarrow \infty, \forall i} p_c(\mathcal{G}^{\vec{k}}) = p_c(\mathbb{Z}^{d(n+1)}).$$

Em seguida gostaríamos de verificar se existe alguma propriedade de monotonicidade da função  $\theta^{\mathcal{G}^k}(p)$  na variável  $k$ , para  $p$  fixo. Em relação a esse problema apresentamos uma conjectura.

# Sumário

---

<b>1</b>	<b>Modelo de percolação e algumas variações</b>	<b>13</b>
1.1	Modelo independente de percolação de sítios . . . . .	13
1.2	Percolação de palavras . . . . .	19
1.3	Percolação de longo alcance . . . . .	24
1.4	Construção dinâmica do aglomerado da origem . . . . .	26
1.5	Percolação em Lajes . . . . .	29
<b>2</b>	<b>Percolação de palavras em modelos de longo alcance</b>	<b>32</b>
2.1	Todas palavras podem ser vistas . . . . .	32
2.2	Qual a escala da constante $K(p)$ quando $p$ vai para zero? . . . . .	38
2.2.1	Para ver todas as palavras . . . . .	38
2.2.2	Para ver quase todas as palavras . . . . .	46
<b>3</b>	<b>Ponto Crítico e Probabilidade de Percolação em Modelos de Longo Alcance</b>	<b>50</b>
3.1	Resultados . . . . .	51
3.2	Provas dos lemas . . . . .	54
3.3	Uma conjectura . . . . .	62

---

# Modelo de percolação e algumas variações

---

Neste capítulo introduziremos o modelo de percolação independente de sítios. Parte da notação utilizada nesta tese também será introduzida nesse capítulo, assim como alguns dos principais resultados da teoria de percolação, que serão utilizados. O capítulo se divide em cinco seções. Na primeira delas introduziremos o modelo de percolação independente de sítios e alguns resultados desse modelo. Na segunda e terceira seções apresentaremos o problema de percolação de palavras e um modelo de longo alcance respectivamente. Na quarta e quinta seções apresentaremos duas técnicas que serão utilizadas no decorrer desse trabalho.

## 1.1 Modelo independente de percolação de sítios

A teoria de percolação foi introduzida por Broadbent e Hammersley (veja [6]) em 1957. Desde então, a teoria tem sido fonte de problemas interessantes e muitos artigos e livros que tratam do assunto foram publicados. O propósito original era estudar fenômenos físicos tais como o fluxo de um fluido através de um meio poroso desordenado.

Um processo de percolação independente de sítios de parâmetro  $p \in [0, 1]$  é definido como segue. Seja  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  um grafo infinito, localmente finito, conexo, com conjunto de vértices  $V(\mathcal{G}) = \mathcal{V}$  enumerável e conjunto de elos  $E(\mathcal{G}) = \mathcal{E}$ . Para os nossos propósitos, consideramos  $\mathcal{V} = \mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 2$ , e  $\mathcal{E} = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \exists! i \text{ tal que } |x_i - y_i| = 1 \text{ e } |x_j - y_j| = 0, \forall j \neq i\}$ . A partir de agora, sempre que falarmos sobre o grafo  $\mathbb{Z}^d$ , estaremos, com um certo abuso de notação, nos referindo ao grafo com conjunto de vértices e conjunto de elos definidos acima. Introduzimos probabilidade neste modelo da seguinte forma: a cada vértice  $v \in \mathcal{V}$  associamos, de maneira independente, uma variável aleatória  $\omega_v$ , que assume os valores 1 ou 0 com probabilidades  $p$  e  $1 - p$  respectivamente. Se  $\omega_v = 1$  dizemos que  $v$  está ocupado e se

$\omega_v = 0$  dizemos que  $v$  está vazio. O espaço amostral é o conjunto  $\Omega = \{0, 1\}^{\mathcal{V}}$ . Chamamos  $\Omega$  de espaço das configurações e denotamos um elemento deste espaço por  $\omega = (\omega_v : v \in \mathcal{V})$ .

Resta-nos definir uma  $\sigma$ -álgebra apropriada e uma medida de probabilidade. Pode ser mostrado que os cilindros finito-dimensionais formam uma semi-álgebra, denotada por  $\mathcal{C}$ . Para todo cilindro

$$C(j, a_0, \dots, a_n) = \{\omega \in \Omega : \omega_{j+i} = a_i, 0 \leq i \leq n, a_i \in \{0, 1\}\}$$

definimos

$$\mu : \mathcal{C} \mapsto [0, 1],$$

onde

$$\mu(C(j, a_0, \dots, a_n)) = \prod_{i:a_i=1} p \prod_{i:a_i=0} (1-p).$$

Pelo Teorema de Extensão de Hahn Kolmogorov, esta medida  $\mu$  pode ser estendida de maneira única a uma medida de probabilidade  $P_p$ , definida em  $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$ , ou seja, a menor  $\sigma$ -álgebra gerada pela semi-álgebra dos cilindros finito-dimensionais e, além disso,  $P_p(A) = \mu(A)$ ,  $\forall A \in \mathcal{C}$ . Desta forma, construímos um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P_p)$ , que será utilizado para fundamentação da teoria de percolação.

**Definição 1.1.** *Um caminho em  $\mathcal{G}$  é uma sequência (finita ou infinita)  $v_1, v_2, \dots$  de vértices de  $\mathcal{G}$  tal que,  $\forall i \in \mathbb{N}$ ,  $\langle v_i, v_{i+1} \rangle \in \mathcal{E}$ . Dada uma configuração  $\omega \in \Omega$ , um caminho é ocupado em  $\omega$  se todos os seus vértices estão ocupados em  $\omega$ .*

**Definição 1.2.** *Um caminho  $(v_1, v_2, \dots)$  é auto-evitante se  $v_i \neq v_j$  para  $i \neq j$ .*

**Definição 1.3.** *Dada uma configuração  $\omega \in \Omega$ , dizemos que o vértice  $x$  está conectado ao vértice  $y$  em  $\omega$  se existe um caminho ocupado  $(v_1, v_2, \dots, v_k)$  em  $\omega$  tal que  $v_1 = x$  e  $v_k = y$ ,  $v_1 \neq v_k$ . Quando isso ocorre, escrevemos  $x \longleftrightarrow y$ .*

Observe que a existência de um caminho ocupado conectando os vértices  $x$  e  $y$  necessariamente implica a existência de um caminho ocupado auto-evitante com a mesma propriedade.

Denotamos por  $C_x(\omega)$  o aglomerado ocupado que contém  $x$ , ou seja, o conjunto de vértices de  $\mathcal{G}$ , que estão conectados ao vértice  $x$  por caminhos ocupados na configuração  $\omega$ . Os elos de  $C_x(\omega)$  são os elos incidentes aos vértices de  $C_x(\omega)$ . Formalmente escrevemos

$$C_x(\omega) = \{y \in \mathbb{Z}^d : y \longleftrightarrow x \text{ em } \omega\}.$$

Uma das quantidades principais em percolação é a função  $\theta_x(p)$ , que representa a probabilidade de um vértice  $x$  pertencer a um aglomerado ocupado infinito. Definimos então

$$\theta_x : [0, 1] \rightarrow [0, 1],$$

onde

$$\theta_x(p) = P_p\{\omega \in \Omega : |C_x(\omega)| = \infty\}.$$

Observe que  $|C_x(\omega)| = \infty$  se, e somente se, existe uma sequência infinita de vértices distintos  $x = v_1, v_2, \dots$  tais que  $\langle v_i, v_{i+1} \rangle \in \mathcal{E}$  e  $v_i$  é ocupado para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Quando existe tal caminho, dizemos que o vértice  $x$  percola. Pela invariância translacional de  $\mathcal{Z}^d$  e da medida  $P_p$ , não há perda de generalidade em supor que  $x$  é a origem do grafo. Nesse caso, escrevemos  $C$  para o aglomerado da origem e  $\theta(p)$  em lugar de  $\theta_0(p)$ .

Sabemos que o parâmetro  $p$  mede a probabilidade de um sítio estar ocupado. Examinemos o modelos nos casos em que  $p$  assume valores extremos. Observe que  $\theta(0) = 0$ , pois nesse caso não há sítios ocupados, quase certamente. Em particular,  $|C(\omega)| = 0$  quase certamente. Por outro lado, vemos que  $\theta(1) = 1$ , pois nesse caso todos sítios estão ocupados com probabilidade 1. Em particular, a origem está conectada a todos os sítios quase certamente.

Um fato intuitivo, porém não trivial, é que a função  $\theta(p)$  é monótona não decrescente em  $p$  no intervalo  $[0, 1]$ . A demonstração desse fato pode ser vista em [12]. Dessa forma, é natural definir

$$p_c = \sup\{p : \theta(p) = 0\}.$$

$p_c$  é chamado *ponto crítico* do modelo e é tal que

$$\theta(p) \begin{cases} = 0 & \text{se } p < p_c, \\ > 0 & \text{se } p > p_c. \end{cases}$$

Um processo de percolação de elos pode ser definido de forma similar à construção acima. De forma geral, dizemos que o elo  $e$  está aberto ou fechado com probabilidade  $p$  e  $1 - p$  respectivamente e as definições acima são estabelecidas de maneira análoga. Para uma descrição detalhada desta construção, veja [12].

Denotamos por  $p_c^s(\mathcal{G})$  o ponto crítico de um modelo de percolação de sítios no grafo  $\mathcal{G}$  e  $p_c^e(\mathcal{G})$  o ponto crítico de um modelo de percolação de elos nesse mesmo grafo. Quando o contexto estiver claro, omitiremos o índice e denotaremos apenas por  $p_c$  ou  $p_c(\mathcal{G})$ .

Em  $\mathcal{Z}^d$ ,  $d \geq 2$ , é interessante observar a existência de um ponto crítico não trivial, ou



seja, temos o seguinte teorema, válido para os modelos de percolação de sítios e de elos, e cuja demonstração pode ser vista em [12].

**Teorema 1.1.** *Se  $d \geq 2$  então  $0 < p_c^s(\mathcal{Z}^d) < 1$ .*

Para um processo de percolação de elos em  $\mathcal{Z}^2$ , sabe-se que  $p_c^e = \frac{1}{2}$  (veja Seção 11.3 em [12]). Esse fato, juntamente com o Teorema 1.33 em [12], garante que

$$p_c^s(\mathcal{Z}^2) > \frac{1}{2}.$$

Em [27] foi mostrado que

$$p_c^s(\mathcal{Z}^2) \leq 0,679492.$$

De fato, resultados de simulações indicam que

$$p_c^s(\mathcal{Z}^2) \approx 0,59.$$

O valor exato de  $p_c^s$  não será importante para nós, basta o conhecimento de que  $0 < p_c^s < 1$ .

Um fato digno de menção é que se a origem percola com probabilidade positiva, então existe aglomerado infinito quase certamente. Para ver isso considere o evento

$$\bigcup_{x \in \mathbb{Z}^d} \{\omega \in \Omega : |C_x(\omega)| = \infty\},$$

isto é, o evento *existe aglomerado infinito* e a função

$$\psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1],$$

onde

$$\psi(p) = P_p \left\{ \bigcup_{x \in \mathbb{Z}^d} \{\omega \in \Omega : |C_x(\omega)| = \infty\} \right\}.$$

Note que o evento acima é caudal, pois não depende do estado de qualquer quantidade finita de sítios. Temos então, pela Lei 0-1 de Kolmogorov, que  $\psi(p) = 0$  ou  $\psi(p) = 1$ . Observe que

$$\psi(p) \leq \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} P_p \{\omega \in \Omega : |C_x(\omega)| = \infty\}.$$

Logo, se  $\theta(p) = 0$ , então  $\psi(p) = 0$ . Por outro lado, note que

$$\{\omega \in \Omega : |C(\omega)| = \infty\} \subset \bigcup_{x \in \mathbb{Z}^d} \{\omega \in \Omega : |C_x(\omega)| = \infty\}.$$

Portanto

$$P_p \left\{ \bigcup_{x \in \mathbb{Z}^d} \{\omega \in \Omega : |C_x(\omega)| = \infty\} \right\} \geq P_p \{\omega \in \Omega : |C(\omega)| = \infty\},$$

e  $\theta(p) > 0$  implica que  $\psi(p) = 1$ . Dessa forma tem-se o seguinte resultado:

**Teorema 1.2.**

$$\psi(p) = \begin{cases} 0 & \text{se } \theta(p) = 0, \\ 1 & \text{se } \theta(p) > 0. \end{cases}$$

A importância do Teorema 1.1 está no fato de que, em duas ou mais dimensões, existem duas fases distintas do processo de percolação. Se  $p < p_c$ , ou seja, na fase subcrítica, cada vértice de  $\mathcal{Z}^d$  está, quase certamente, em um aglomerado ocupado finito ou vazio. Desta forma, todos aglomerados ocupados são finitos ou vazios com probabilidade 1. No entanto, se  $p > p_c$ , ou seja, na fase supercrítica, cada vértice está, com probabilidade positiva, em um aglomerado ocupado infinito, de forma que existe pelo menos um aglomerado ocupado infinito quase certamente.

Em  $\mathcal{Z}^d$  é interessante observar que, se existe aglomerado infinito, este é único quase certamente. Para ver isso, considere o evento

$$I_k(\omega) = \{\omega \in \Omega : \text{Existem exatamente } k \text{ aglomerados infinitos em } \omega\},$$

$0 \leq k \leq \infty$ . Tem-se o seguinte teorema, cuja demonstração pode ser vista na Seção 8.2 de [12].

**Teorema 1.3.** *Se  $p$  é tal que  $\theta(p) > 0$ , então*

$$P_p \{\omega \in \Omega : I_1(\omega)\} = 1.$$

A seguir apresentamos uma desigualdade importante, provada primeiramente por Harris (veja [14]).

## Desigualdade FKG

A Desigualdade FKG será utilizada mais tarde nesta tese. A seguir definimos o que é variável aleatória crescente e posteriormente a desigualdade propriamente dita.

**Definição 1.4.** *Considere  $\omega$  e  $\omega' \in \Omega$ . Dizemos que  $\omega \preceq \omega'$  se  $\omega(x) \leq \omega'(x) \quad \forall x \in \mathcal{V}$ , isto é, se cada vértice que está ocupado em  $\omega$  também está ocupado em  $\omega'$ .*

**Definição 1.5.** *A variável aleatória  $X$  é chamada crescente se  $X(\omega) \leq X(\omega')$  sempre que  $\omega \preceq \omega'$ . Como consequência, o evento  $A$  é chamado crescente se sua função indicadora  $I_A$  for crescente.*

**Exemplo 1** Se  $v_1$  e  $v_2$  são vértices de  $\mathcal{Z}^d$ , então o evento  $\{\omega \in \Omega : v_1 \longleftrightarrow v_2 \text{ em } \omega\}$  é crescente.

Se  $A$  e  $B$  são eventos crescentes, então,  $\forall p \in (0, 1)$ , é intuitiva a idéia de que

$$P_p\{A|B\} \geq P_p\{A\},$$

pois a ocorrência do evento crescente  $B$  na configuração  $\omega_0$ , necessariamente implica na existência de sítios abertos e portanto aumenta a probabilidade de ocorrência do evento crescente  $A$  em  $\omega_0$ . É precisamente isso o que diz o resultado abaixo.

### **Teorema 1.4. Desigualdade FKG**

a) *Sejam  $X$  e  $Y$  variáveis aleatórias crescentes com  $E_p(X^2) < \infty$  e  $E_p(Y^2) < \infty$ . Então*

$$E_p(XY) \geq E_p(X)E_p(Y).$$

b) *Sejam  $A$  e  $B$  eventos crescentes. Então*

$$P_p\{A \cap B\} \geq P_p\{A\}P_p\{B\}. \tag{1.1.1}$$

A prova da parte b) do teorema acima é facilmente obtida tomando  $X = I_A$  e  $Y = I_B$ . Para a prova da parte a) veja [12].

Além do modelo de percolação de sítios descrito anteriormente e do modelo de percolação de elos, cuja principal referência é [12], existem várias outras variantes do modelo de percolação. A seguir apresentamos duas delas, que serão estudadas mais profundamente nessa tese.

## 1.2 Percolação de palavras

O problema de percolação de palavras foi introduzido por Itai Benjamini e Harry Kesten em [3]. O problema pode ser formulado da seguinte maneira: como anteriormente, temos um grafo  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  localmente finito com conjunto de vértices  $\mathcal{V}$  infinito enumerável. Realizamos um processo independente de percolação de sítios neste grafo. Como espaço de probabilidade, consideramos o mesmo espaço previamente definido, ou seja,  $(\Omega, \mathcal{F}, P_p)$ , onde  $\Omega = \{0, 1\}^{\mathcal{V}}$ ,  $\mathcal{F}$  é a  $\sigma$ -álgebra gerada pelos cilindros em  $\Omega$  e  $P_p = \prod_{v \in \mathcal{V}} \mu(v)$  é o produto de medidas de Bernoulli com parâmetro  $p$ .

Denote  $\Xi = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . Uma sequência binária semi-infinita  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in \Xi$  será chamada uma *palavra*. Dados uma palavra  $\xi \in \Xi$ , um vértice  $v \in \mathcal{V}$  e uma configuração  $\omega \in \Omega$ , introduzimos a seguinte definição:

**Definição 1.6.** *Dizemos que a palavra  $\xi$  é vista na configuração  $\omega$  a partir do vértice  $v$  se existir um caminho auto-evitante  $(v = v_0, v_1, v_2, \dots)$  tal que  $\omega_{v_i} = \xi_i, \forall i = 1, 2, \dots$ .*

Note que o estado de  $v$  é indiferente na definição acima. Observe também que no modelo de percolação descrito anteriormente estávamos interessados em estudar sob quais circunstâncias a palavra  $\vec{1} = (1, 1, \dots)$  é vista com probabilidade positiva.

Ao estudar percolação de palavras, no fundo estamos interessados na ocorrência ou não de caminhos  $(v_0, v_1, \dots)$  tais que  $\omega_{v_i} = \xi_i, i \geq 1$ , para qualquer sequência prescrita  $(\xi_i)_{i \geq 1} \in \Xi$ . Gostaríamos também de determinar em que circunstâncias a coleção de sequências  $\xi$  que são vistas é grande em algum sentido que será definido posteriormente. Com este intuito introduzimos a seguinte notação:

Fixados  $\omega \in \Omega$  e  $v \in \mathcal{V}$ , considere os conjuntos aleatórios

$$S_v(\omega) = \{\xi \in \Xi : \xi \text{ é vista em } \omega \text{ a partir de } v\}$$

e

$$S_\infty(\omega) := \bigcup_{v \in \mathcal{V}} S_v(\omega) = \{\xi \in \Xi : \xi \text{ é vista em } \omega \text{ a partir de algum vértice}\}.$$

O primeiro deles é formado pelas palavras  $\xi \in \Xi$  que são vistas na configuração  $\omega$  a partir de um vértice  $v \in \mathcal{V}$  fixado. Observe que  $S_v(\omega)$  está contido no conjunto  $S_\infty(\omega)$  e que o tamanho máximo destes conjuntos é  $\Xi$ . Um problema importante então será descrever sob

quais circunstâncias os eventos

$$A_1 = \{\omega \in \Omega : S_\infty(\omega) = \Xi\}$$

e

$$A_2 = \{\omega \in \Omega : \exists v \in \mathbb{V} \text{ tal que } S_v(\omega) = \Xi\}$$

ocorrem quase certamente. Antes de considerar as probabilidades dos eventos acima, enunciemos a Proposição 2 de [3], que garante a mensurabilidade dos mesmos.

**Proposição 1.1.** *Se  $\mathcal{G}$  é localmente finito, então os eventos  $A_1$  e  $A_2$  são mensuráveis com relação a  $\mathcal{F}$ , onde  $\mathcal{F}$  é a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\{\omega_v : v \in \mathcal{V}\}$ .*

Em [3], os autores mostram que os eventos  $A_1$  e  $A_2$  definidos acima ocorrem  $P_{\frac{1}{2}}$  - quase certamente em um modelo independente de percolação de sítios em  $\mathcal{Z}^d$  para  $d \geq 10$  e  $d \geq 40$  respectivamente. Note que no evento  $A_2$ , o vértice  $v$ , a partir do qual se vê todas as palavras, pode mudar de configuração para configuração.

Mesmo que em um grafo  $\mathcal{G}$  não seja possível ver todas palavras, ou seja, se  $P_p\{\omega \in \Omega : S_\infty(\omega) = \Xi\} = 0$ , ainda assim seria possível ver *quase todas* as palavras nesse grafo. Aqui, *quase todas* se refere à medida de probabilidade produto  $\mu_\alpha = \prod_{i=1}^{\infty} \nu_i$  em  $\Xi$ , onde para cada  $i$

$$\nu_i(1) = 1 - \nu_i(0) = \alpha, \text{ para algum } 0 < \alpha < 1. \quad (1.2.1)$$

Note que sob  $\mu_\alpha$  as  $\xi_i$  são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição de Bernoulli com parâmetro  $\alpha$ . Desta forma temos definido outro espaço de probabilidade  $(\Xi, \mathcal{B}, \mu_\alpha)$ , onde  $\mathcal{B}$  é a  $\sigma$ -álgebra gerada pelos cilindros em  $\Xi$ . Para toda  $\xi \in \Xi$  definimos a função

$$\tau_p : \Xi \rightarrow [0, 1]$$

$$\tau_p(\xi) = P_p\{\omega \in \Omega : \xi \text{ é vista a partir de algum } v\}.$$

A seguir apresentamos uma proposição importante, cujo enunciado e demonstração podem ser vistos em [3].

**Proposição 1.2.** *Se  $\mathcal{G}$  é localmente finito, então  $\tau_p(\cdot)$  é  $\mathcal{B}$ -mensurável. Se  $\mathcal{G} = \mathbb{Z}^d$  ou uma árvore localmente finita, então  $\tau_p(\cdot)$  toma somente os valores 0 ou 1.*

**Definição 1.7.** *Dizemos que a palavra  $\xi$  percola se  $\tau_p(\xi) = 1$ .*

Outra observação importante, cuja demonstração pode ser vista em [3], é que em muitos grafos  $\tau_p(\xi)$  não depende de nenhuma quantidade finita de coordenadas  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ . Isto é, se  $\tau_p(\xi) > 0$ ,  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)$ , então  $\tau_p(\hat{\xi}) > 0$ , onde  $\hat{\xi} = (\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \dots, \hat{\xi}_n, \xi_{n+1}, \dots)$ . Como  $\tau_p$  toma somente os valores 0 ou 1, temos  $\tau_p(\hat{\xi}) = 1$  para toda  $\hat{\xi}$  que difere de  $\xi$  em apenas uma quantidade finita de coordenadas. Sendo assim,  $\tau_p$  é uma variável caudal, logo pela Lei 0-1 de Kolmogorov temos que

$$\mu_\alpha\{\xi : \tau_p(\xi) = 1\} = 0 \text{ ou } 1, \quad \forall \alpha \in (0, 1).$$

Se  $\mu_\alpha\{\xi \in \Xi : \tau_p(\xi) = 1\} = 1$ , dizemos que a palavra aleatória percola.

Outro resultado importante pode ser obtido ao considerarmos o conjunto

$$\Lambda := \{(\xi, \omega) : \xi \text{ é vista a partir de algum vértice } v \text{ na configuração } \omega\}.$$

Pela Proposição 1 em [3], temos que  $\Lambda$  é um conjunto mensurável segundo a  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F} \times \mathcal{B}$ .

Seja  $I_\Lambda$  a função indicadora do conjunto  $\Lambda$ . Temos que

$$\int_{\Xi} \int_{\Omega} I_\Lambda dP_p d\mu_\alpha = \int_{\Xi} \tau_p(\xi) d\mu_\alpha = \int_{\{\xi \in \Xi : \tau_p(\xi) = 1\}} d\mu_\alpha = \mu_\alpha\{\xi \in \Xi : \tau_p(\xi) = 1\}. \quad (1.2.2)$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_{\Xi} I_\Lambda d\mu_\alpha dP_p &= \int_{\Omega} \mu_\alpha(S_\infty(\omega)) dP_p = \int_{\{\omega \in \Omega : \mu_\alpha(S_\infty(\omega)) = 1\}} dP_p \\ &= P_p\{\omega \in \Omega : \mu_\alpha(S_\infty(\omega)) = 1\}. \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Pelo Teorema de Fubini, temos que as expressões em (1.2.2) e (1.2.3) são iguais. Isto implica que a palavra aleatória percola se, e somente se, um conjunto de palavras de medida  $\mu_\alpha$  igual a 1 pode ser visto a partir de algum vértice em  $\mathbb{Z}^d$ ,  $P_p$  - quase certamente. Como dito no início desta seção, mesmo que todas palavras não sejam vistas  $P_p$  - quase certamente, ainda assim *quase todas* as palavras podem ser vistas

$P_p$  - quase certamente. Vejamos os seguintes exemplos:

**Exemplo 2** Considere o caso em que  $\mathcal{G} = \mathcal{T} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  é a rede triangular. Nesse caso,  $\mathcal{V} = \mathbb{Z}^2$  e  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathbb{Z}^2)$  acrescido de um elo diagonal em cada face de  $\mathcal{T}$  no sentido sudoeste nordeste. Formalmente,  $\mathcal{E}$  são os elos entre pares  $(i_1, j_1)$  e  $(i_2, j_2)$  tais que

$$|i_1 - i_2| + |j_1 - j_2| = 1$$

ou

$$i_2 = i_1 + 1, j_2 = j_1 - 1.$$

Nesse grafo temos  $p_c^s(\mathcal{T}) = \frac{1}{2}$ , e em [16] os autores mostram que a palavra  $\vec{1}$  não é vista em  $\mathcal{T}$  quando  $p = \frac{1}{2}$  quase certamente. Portanto, temos que

$$P_{\frac{1}{2}}\{\omega \in \Omega : S_\infty(\omega) = \Xi \text{ em } \mathcal{T}\} = 0.$$

No entanto, a palavra  $(1,0,1,0,\dots)$  é vista em  $\mathcal{T}$  quando  $p = \frac{1}{2}$  quase certamente, veja [28]. De fato, em [18] os autores mostram que, para todo  $0 < \alpha < 1$ , *quase todas* as palavras são vistas em  $\mathcal{T}$   $P_{\frac{1}{2}}$  - quase certamente. Aqui *quase todas* se refere à medida dada na expressão (1.2.1).

**Exemplo 3** Considere um modelo de percolação de elos em  $\mathbb{Z}^2$ . Como pode ser visto em [12], por exemplo, neste modelo associamos, independentemente, a cada elo  $e$  de  $\mathbb{Z}^d$  uma variável aleatória  $X(e)$  tal que

$$P_p\{\omega \in \Omega : X(e) = 1\} = p = 1 - P_p\{\omega \in \Omega : X(e) = 0\}.$$

Nesse caso, o significado da frase "ξ é vista a partir de  $v$ " deveria ser que existe um caminho auto-evitante  $(v_0 = v, v_1, \dots)$  em  $\mathbb{Z}^d$ , começando em  $v$ , tal que  $X(e_i) = \xi_i$ , onde  $e_i$  é o elo entre os vértices  $v_{i-1}$  e  $v_i$ . Em  $\mathbb{Z}^2$  temos  $p_c^e = \frac{1}{2}$ , e sabe-se que quando  $p = \frac{1}{2}$ , a palavra  $\vec{1}$  não é vista em  $\mathbb{Z}^2$  quase certamente (veja Seção 11.3 de [12]). Portanto,

$$P_{\frac{1}{2}}\{\omega \in \Omega : S_\infty(\omega) = \Xi \text{ em } \mathbb{Z}^2\} = 0.$$

Poderia se esperar que *quase todas* as palavras poderiam ser vistas quase certamente em  $\mathbb{Z}^2$ . Porém esse problema continua em aberto até os dias de hoje.

O lema a seguir, cuja demonstração pode ser vista em [19], é uma ferramenta importante para decidirmos quando a palavra aleatória percola e tem grande utilidade quando temos

um grafo  $\mathcal{G}$  tal que  $p_c(\mathcal{G}) < \frac{1}{2}$ .

**Lema 1.1.** *Seja  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}(\mathcal{G}), \mathcal{E}(\mathcal{G}))$  um grafo conexo com conjunto de vértices infinito enumerável e considere um modelo de percolação de sítios independente, com parâmetro  $p \in [0, 1]$ , no grafo  $\mathcal{G}$ . Defina o evento  $Z_\xi(v) = \{\omega \in \Omega : \xi \text{ é vista em } \mathcal{G} \text{ a partir de } v\}$ . Então, dada qualquer palavra  $\xi \in \Xi$  e qualquer vértice  $v_0 \in V(\mathcal{G})$ , temos que*

$$P_p(Z_\xi(v_0)) \geq \min\{P_p(Z_{\vec{0}}(v_0)), P_p(Z_{\vec{1}}(v_0))\}. \quad (1.2.4)$$

Note que, se  $p_c(\mathcal{G}) < \frac{1}{2}$ , então  $\forall p \in (p_c(\mathcal{G}), 1 - p_c(\mathcal{G}))$ , temos

$$P_p\{\omega \in \Omega : \vec{1} \text{ é vista a partir de } v \in \mathcal{V}(\mathcal{G})\} > 0 \quad (1.2.5)$$

e

$$P_p\{\omega \in \Omega : \vec{0} \text{ é vista a partir de } v \in \mathcal{V}(\mathcal{G})\} > 0. \quad (1.2.6)$$

Nesse caso, o Lema 1.1 implica que

$$P_p\{\omega \in \Omega : \xi \text{ é vista a partir de } v \in \mathcal{G}\} > 0 \quad \forall \xi \in \Xi, \quad (1.2.7)$$

ou equivalentemente,

$$\tau_p(\xi) = 1 \quad \forall \xi \in \Xi, \quad (1.2.8)$$

isto é,

$$\mu_\alpha\{\xi \in \Xi : \tau_p(\xi) = 1\} = 1, \quad \forall \alpha \in (0, 1). \quad (1.2.9)$$

O Teorema de Fubini implica então que

$$P_p\{\omega \in \Omega : \mu_\alpha(S_\infty(\omega)) = 1 \text{ em } \mathcal{G}\} = 1.$$

Um caso particular interessante ocorre quando  $\mathcal{G} = \mathcal{Z}^d$ ,  $d \geq 3$ . Note que  $p_c(\mathcal{Z}^{d+1}) \leq p_c(\mathcal{Z}^d)$ , pois

$$\{|C(\omega)| = \infty \text{ em } \mathcal{Z}^d\} \subset \{|C(\omega)| = \infty \text{ em } \mathcal{Z}^{d+1}\}.$$

Em [7], Campanino e Russo mostraram que  $p_c(\mathcal{Z}^3) < \frac{1}{2}$ . Desta forma, temos que

$$P_p\{\omega \in \Omega : \mu_\alpha(S_\infty(\omega)) = 1 \text{ em } \mathcal{Z}^d\} = 1, \quad d \geq 3, \quad (1.2.10)$$



quando  $p_c(\mathbb{Z}^d) < p < 1 - p_c(\mathbb{Z}^d)$ .

Observe que a Expressão (1.2.10) não implica que

$$P_p\{\omega \in \Omega : S_\infty(\omega) = \Xi\} = 1 \quad (1.2.11)$$

em  $\mathbb{Z}^d$ .

Um exemplo dessa situação pode ser visto em [3], onde os autores constroem um grafo em que

$$P_{\frac{1}{2}}\{\omega \in \Omega : \mu_{\frac{1}{2}}(S_\infty(\omega)) = 1, S_\infty \neq \Xi\} = 1.$$

Note que isso também ocorre na rede Triangular, como visto no Exemplo 2. Talvez o problema em aberto mais importante em percolação de palavras seja mostrar (1.2.11) quando  $d = 3$ .

A seguir apresentamos o modelo de Percolação de Longo Alcance.

### 1.3 Percolação de longo alcance

Uma outra variação do modelo independente de percolação usual é o modelo de percolação independente com longo alcance, o qual descrevemos a seguir. Seja  $\mathcal{L}^d = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  o grafo em que  $\mathcal{V} = \mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 2$ , e

$$\mathcal{E} = \{\langle x, y \rangle \subset \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \exists! i \in \{1, \dots, d\} \text{ tal que } x_i \neq y_i \text{ e } x_j = y_j, \forall j \neq i\},$$

isto é,  $\mathcal{E}$  é formado por todos os elos de longo alcance em todas direções paralelas a algum eixo coordenado. Defina

$$\mathcal{E}_k = \{\langle v, u \rangle \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \exists! i \in \{1, \dots, d\} \text{ tal que } |v_i - u_i| = k \text{ e } v_j = u_j, \forall j \neq i\}, \quad (1.3.1)$$

isto é, o conjunto dos elos paralelos a algum eixo coordenado e de comprimento  $k$ , e considere o grafo  $\mathcal{L}_K^d = (\mathbb{Z}^d, \cup_{n=1}^K \mathcal{E}_n)$ . Observe que,  $\mathcal{L}_K^d$  pode ser obtido a partir de  $\mathcal{L}^d$  apagando todos os elos cujos comprimentos são maiores que  $K$ .

Consideremos o problema de *ver palavras* em  $\mathcal{L}^d$ ,  $d \geq 1$ . Afirmamos que

$$P_p\{\omega \in \Omega : \mu_\alpha(S_\infty(\omega)) = 1 \text{ em } \mathcal{L}^d\} = 1, \quad \forall p \in (0, 1).$$

Para ver isso verificaremos que  $\tau_p(\xi) = 1$ ,  $\forall \xi \in \Xi$  e  $\forall p \in (0, 1)$ . De fato, mostraremos que

$\tau_p(\xi) = 1 \forall \xi \in \Xi$  e  $\forall p \in (0, 1)$  no grafo  $\mathcal{L}^1$ , o que implica a afirmação anterior. Aqui,  $\mathcal{L}^1$  é o grafo com conjunto de vértices  $\mathcal{V} = \mathbb{Z}$  e conjunto de elos

$$\mathcal{E} = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x \neq y\}.$$

Dado  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 2$  fixo, considere o evento

$$B_j = \{\omega \in \Omega : \exists v_1 \text{ e } v_2 \in [m(j-1), mj] \text{ tais que } \omega_{v_1} = 1 \text{ e } \omega_{v_2} = 0\}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Um cálculo simples mostra que

$$P_p\{B_j\} = 1 - (1-p)^m - p^m \equiv c(p) > 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \forall p \in (0, 1).$$

Como os eventos  $B_j$ 's são independentes e

$$\sum_j P_p\{B_j\} = \sum_j c(p) = \infty,$$

podemos fazer uso do Lema de Borel Cantelli e concluir que

$$P_p\{\omega \in \Omega : B_j \text{ infinitas vezes}\} = 1. \quad (1.3.2)$$

Pode-se verificar que a equação acima implica que  $\tau_p(\xi) = 1, \forall \xi \in \Xi$ . Portanto, pelo Teorema de Fubini, temos que

$$P_p\{\omega \in \Omega : \mu_\alpha(S_\infty(\omega)) = 1 \text{ em } \mathcal{L}^d\} = 1, \quad \forall p \in (0, 1).$$

De fato, a Equação (1.3.2) implica que

$$P_p\{\omega \in \Omega : S_\infty(\omega) = \Xi \text{ em } \mathcal{L}^d\} = 1, \quad \forall p \in (0, 1).$$

Em [19] foi conjecturado se a infinitude do tamanho dos elos é essencial para que a probabilidade acima seja total? Nesse mesmo trabalho (veja Teorema 1), o autor mostrou que,  $\forall d \geq 2, \forall p \in (0, 1)$  existe um número inteiro positivo  $K = K(p)$ , tal que

$$P_p \left\{ \bigcup_{v \in \mathcal{V}} \{\omega \in \Omega : \xi \text{ é vista em } \mathcal{L}_K^d \text{ a partir de } v\} \right\} = 1, \quad \forall \xi \in \Xi. \quad (1.3.3)$$

A Equação (1.3.3) diz que, dada uma palavra  $\xi \in \Xi$  qualquer, esta pode ser vista em  $\mathcal{L}_K^d$  a partir de algum vértice  $v \in \mathcal{V}$ , em um conjunto de configurações de probabilidade 1. Ou seja,  $\tau_p(\xi) = 1, \forall \xi \in \Xi$  e pelo Teorema de Fubini

$$P_p\{\omega \in \Omega : \mu(S_\infty(\omega)) = 1 \text{ em } \mathcal{L}_K^d\} = 1, \quad (1.3.4)$$

isto é, *quase todas* as palavras são vistas em  $\mathcal{L}_K^d$ .

Como observado anteriormente, a Equação (1.3.4) não implica que

$$P_p\{\omega \in \Omega : S_\infty(\omega) = \Xi \text{ em } \mathcal{L}_K^d\} = 1, \quad (1.3.5)$$

isto é, que todas as palavras são vistas quase certamente, mesmo para outro valor da constante  $K$ .

No próximo capítulo mostraremos a veracidade da Equação (1.3.5), respondendo a pergunta feita em [19]. Mostraremos que, para  $d \geq 2$ ,

$$P_p\{\omega \in \Omega : \exists v \in \mathcal{V} \text{ tal que } S_v(\omega) = \Xi \text{ em } \mathcal{L}_K^d\} = 1.$$

Ou seja, provaremos que dado qualquer  $p \in (0, 1)$ , existe  $K = K(p) \in \mathbb{N}$  tal que, se apagarmos todos os elos com tamanhos maiores que  $K$ , ainda assim podemos ver todas as palavras simultaneamente, a partir de um único vértice, quase certamente. Tal resultado também foi obtido de modo independente por G. Grimmett (veja [13]).

## 1.4 Construção dinâmica do aglomerado da origem

Nos Capítulos 2 e 3 desta tese utilizaremos a técnica conhecida como Construção Dinâmica do Aglomerado. Nesta seção apresentamos essa técnica e a demonstração de um teorema importante. A demonstração é baseada em [11]. Antes disso, porém, é necessário construir um acoplamento de todos os processos de percolação de sítios em um único espaço amostral. Para isso, seja  $(f(v) : v \in \mathbb{Z}^d)$  uma família de variáveis aleatórias independentes com distribuição uniforme no intervalo  $[0, 1]$  e  $\Omega^+ = [0, 1]^{\mathbb{Z}^d}$ . Defina  $\mathcal{F}^+$  a  $\sigma$ -álgebra apropriada e denote por  $P^+$  a medida de probabilidade produto de uniformes em  $[0, 1]$ . Enquanto  $p$  percorre todo o intervalo  $[0, 1]$  podemos descrever todos os processos de

percolação da seguinte maneira. Se  $0 \leq \rho \leq 1$ , defina a função

$$\eta_\rho : \mathbb{Z}^d \rightarrow \{0, 1\},$$

onde

$$\eta_\rho(v) = \begin{cases} 1 & \text{se } f(v) < \rho, \\ 0 & \text{se } f(v) \geq \rho. \end{cases}$$

Dizemos que o vértice  $v$  está  $\rho$ -ocupado se  $\eta_\rho(v) = 1$  e  $\rho$ -vazio se  $\eta_\rho(v) = 0$ . O vetor  $\eta_\rho(v)$  tem componentes independentes e distribuição marginal dada por

$$P\{\eta_\rho(v) = 0\} = 1 - \rho, \quad P\{\eta_\rho(v) = 1\} = \rho.$$

Pode-se utilizar o espaço de probabilidade  $(\Omega^+, \mathcal{F}^+, P^+)$  para realizar diferentes processos de percolação num mesmo espaço. É claro que  $\eta_{\rho_1}(v) \leq \eta_{\rho_2}(v)$  sempre que  $\rho_1 \leq \rho_2$ . Isso significa que podemos comparar dois processos de percolação com parâmetros  $\rho_1$  e  $\rho_2$  de tal forma que o conjunto de vértices ocupados do primeiro seja um subconjunto do conjunto de vértices ocupados do segundo.

Para definir o processo de construção dinâmica do aglomerado ocupado da origem, introduzimos a seguinte definição.

**Definição 1.8.** *Sejam  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  grafo qualquer e  $A \subseteq \mathcal{G}$ . O bordo externo de  $A$  é definido como*

$$\partial A = \{v \in \mathcal{V} - A : \exists u \in A \text{ tal que } \langle u, v \rangle \in \mathcal{E}\}.$$

Seja  $\mathcal{I}$  um subconjunto infinito conexo de  $\mathcal{V}$  e  $\mathcal{F} = (\mathcal{I}, \mathcal{D})$ , onde  $\mathcal{D}$  é o conjunto de elos incidentes aos vértices de  $\mathcal{I}$ . Considere também  $e_1, e_2, e_3, \dots$  uma ordem fixa nos elos do grafo  $\mathcal{F}$ . Considere uma função qualquer

$$g : \mathcal{V} \rightarrow \{0, 1\},$$

onde,  $\forall v \in \mathcal{V}$ ,

$$g(v) = \begin{cases} 1, & \text{se } v \text{ está ocupado,} \\ 0, & \text{se } v \text{ está vazio.} \end{cases}$$

A partir desta função podemos construir indutivamente uma sequência de pares ordenados  $S_n = (A_n, B_n)$  de subconjuntos de  $\mathcal{V}$  da seguinte maneira:

$$S_0 = (\emptyset, \emptyset),$$

$$S_1 = \begin{cases} (\{v_1\}, \emptyset), & \text{se } g(v_1) = 1, \\ (\emptyset, \{v_1\}), & \text{se } g(v_1) = 0, \end{cases}$$

onde  $v_1$  é a origem de  $\mathcal{F}$ . Uma vez definido  $S_r = (A_r, B_r)$  para  $r = 0, 1, \dots, t$ , definimos  $S_{t+1}$  considerando dois casos.

Caso 1. Caso exista, seja  $e_t$  o primeiro elo da ordem fixada com um vértice pertencente a  $A_t$  e o outro vértice, digamos  $v_{t+1}$ , pertencente a  $(A_t \cup B_t)^c$ . Então definimos

$$S_{t+1} = \begin{cases} (A_t \cup \{v_{t+1}\}, B_t), & \text{se } g(v_{t+1}) = 1, \\ (A_t, B_t \cup \{v_{t+1}\}), & \text{se } g(v_{t+1}) = 0. \end{cases}$$

Caso 2. Se o vértice  $v_{t+1}$  definido no Caso 1 não existe, definimos  $S_{t+1} = S_t$ .

Defina  $S = (A, B)$  onde  $A = \cup_{t=1}^{\infty} A_t$  e  $B = \cup_{t=1}^{\infty} B_t$ . Observe que, caso a origem esteja ocupada, eventualmente construímos o aglomerado aberto  $A$  contendo a origem e contido em  $\mathcal{F}$ . Note também que  $B = \partial A$  em  $\mathcal{F}$ .

A rotina acima produz uma sequência infinita  $\mathcal{J} = (S_0, S_1, \dots)$  e além disso examina os valores de  $g(v_1), g(v_2), \dots$ . A mesma rotina pode ser usada quando  $g(v)$  for uma variável aleatória, e nesse caso a sequência  $\mathcal{J}$  é aleatória. Definindo, para  $t = 0, 1, \dots$ ,

$$\alpha(\mathcal{J}, t) = \begin{cases} \mu(g(v_{t+1}) = 1 | S_0, S_1, \dots, S_t), & \text{se } v_{t+1} \text{ existe,} \\ 1, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde  $\mu$  é a medida de probabilidade associada com as variáveis aleatórias  $g(v_1), g(v_2), \dots$ , obtemos o seguinte teorema:

**Teorema 1.5.** (*G. Grimmett e J. Marstrand, (1990)*) *Suponha que  $G$  é um subconjunto infinito conexo de  $\mathcal{Z}^d$  e que existe  $\gamma$  tal que  $\gamma > p_c(G)$  e*

$$\alpha(\mathcal{J}, t) \geq \gamma \quad \text{para todo } \mathcal{J} \text{ e } t. \quad (1.4.1)$$

*Então*

$$\mu\{|A| = \infty\} > 0.$$

*Demonstração.* Seja  $\{f(v) : v \in \mathcal{Z}^d\}$  uma coleção de variáveis aleatórias independentes com distribuição uniforme no intervalo  $[0, 1]$ . Considere o seguinte processo  $\mathcal{I}$  com medida produto associada  $P$ , a mesma definida no início dessa seção. Declare a origem de  $\mathcal{Z}^d$  *verde* se  $f(0) \leq \mu(g(0) = 1)$ , e *vermelha* caso contrário. Se a origem for vermelha, terminamos o processo. Se a origem for verde, encontre o primeiro elo  $e_1$  da ordem fixada incidente

à origem, e declare seu outro vértice  $v_2$  verde se  $f(v_2) \leq \mu(g(v_2) = 1 | S_1 = \sigma_1)$ , onde  $\sigma_1 = (A_1, B_1)$ , e  $A_1 = \{0\}$  e  $B_1 = \emptyset$ . Este processo é iterado passo a passo da maneira descrita antes do Teorema 1.5. O passo geral consiste em declarar  $v_{t+1}$  (se existir) verde se

$$f(v_{t+1}) \leq \mu(g(v_{t+1}) = 1 | S_i = \sigma_i \text{ para } 0 \leq i \leq t),$$

e vermelho caso contrário, onde  $\sigma_i = (A_i, B_i)$  é o vetor que consiste do conjunto  $A_i$  de vértices verdes e do conjunto  $B_i$  de vértices vermelhos após a consideração de  $v_i$ . Seja  $A = \cup_{t=1}^{\infty} A_t$  o aglomerado de vértices verdes, com bordo externo  $\partial A = B = \cup_{t=1}^{\infty} B_t$  em  $G$ . Segue de (1.4.1) que todo vértice em  $B$  é  $\gamma$ -fechado. O aglomerado  $C_\gamma$  de vértices  $\gamma$ -aberto da origem não pode interceptar  $B$  e portanto é um subconjunto de  $A$ . Por outro lado, temos que  $\gamma > p_c(G)$  e portanto existe uma probabilidade estritamente positiva de  $C_\gamma$  ser infinito, e portanto

$$P\{|C_\gamma| = \infty\} > 0.$$

Como  $\{|C_\gamma| = \infty\} \subset \{|A| = \infty\}$ , temos

$$P\{|A| = \infty\} > 0.$$

Como os processos  $\mathcal{J}$  e  $\mathcal{I}$  tem a mesma distribuição, o resultado segue. ■

A grande virtude dessa construção é que ela nos permite verificar se a origem percola ou não mesmo num modelo onde não existe independência.

## 1.5 Percolação em Lajes

O teorema que enunciaremos a seguir é devido a Grimmett e Marstrand (veja [11] ou Seção 7.2 de [12]). Antes precisamos de algumas definições.

Dado um grafo  $\mathcal{G}$ , defina

$$\theta_v^{\mathcal{G}}(p) \equiv P_p\{\omega \in \Omega : |C_v(\omega)| = \infty \text{ em } \mathcal{G}\}.$$

Defina também

$$B(n) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d : |x| \leq n\},$$

onde  $|x| = \max_i |x_i|$ .

Seja  $d \geq 3$ . Chamamos de *laje de espessura  $k$*  o grafo  $\mathcal{S}^k = (\mathcal{V}(\mathcal{S}^k), \mathcal{E}(\mathcal{S}^k))$  com conjunto

de vértices

$$\mathcal{V}(\mathcal{S}^k) = \{x \in \mathbb{Z}^d : 0 \leq x_j < k, j > 2\}$$

e conjunto de elos

$$\mathcal{E}(\mathcal{S}^k) = \{\langle x, y \rangle \in \mathcal{V}(\mathcal{S}^k) \times \mathcal{V}(\mathcal{S}^k) : \exists! i \text{ tal que } |x_i - y_i| = 1 \text{ e } |x_j - y_j| = 0, \forall j \neq i\}.$$

Observe que nesse grafo temos apenas elos entre vizinhos mais próximos, ou seja, elos de alcance 1. Note também que  $\mathcal{S}^k$  é um grafo transitivo e portanto podemos escrever  $\theta^{\mathcal{G}}(p)$  em lugar de  $\theta_v^{\mathcal{G}}(p)$ . Com um certo abuso de notação, quando escrevermos  $\mathcal{S}^k$  estamos nos referindo ao grafo com conjunto de vértices e conjunto de elos mencionados acima.

Observe que  $\mathcal{V}(\mathcal{S}^k)$  pode ser escrito como

$$\mathcal{V}(\mathcal{S}^k) = \mathbb{Z}^2 \times \{0, \dots, k-1\}^{d-2}$$

e que

$$\mathcal{V}(\mathcal{S}^k) \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{S}^{k+1}) \subseteq \dots \subseteq \mathbb{Z}^d. \quad (1.5.1)$$

Pela continência expressa em (1.5.1) temos

$$\theta^{\mathcal{S}^k}(p) \leq \theta^{\mathcal{S}^{k+1}}(p) \leq \dots \leq \theta^{\mathbb{Z}^d}(p),$$

logo

$$p_c \leq \dots \leq p_c(\mathcal{S}^{k+1}) \leq p_c(\mathcal{S}^k),$$

onde  $p_c = p_c(\mathbb{Z}^d)$ . Isto é,  $(p_c(\mathcal{S}^k))_{k \geq 1}$  é uma sequência monótona decrescente e limitada inferiormente, e portanto convergente com  $\lim_{k \rightarrow \infty} p_c(\mathcal{S}^k) \geq p_c$ . A desigualdade contrária é consequência do próximo teorema, cuja demonstração pode ser vista em [11]. Nesse teorema,  $F \subset \mathbb{Z}^d$  e  $\overline{F} = (F, E)$ , onde  $E$  é o conjunto de elos incidentes aos vértices de  $F$ .

**Teorema 1.6.** *Seja  $d \geq 2$  e  $F$  um subconjunto infinito de  $\mathbb{Z}^d$  com  $p_c(\overline{F}) < 1$ . Para cada  $\eta > 0$ , existe um inteiro positivo  $k$  tal que*

$$p_c(\overline{2kF + B(k)}) \leq p_c + \eta.$$

Tomando  $F = \mathbb{Z}^2$ , observe que  $\overline{2kF + B(k)}$  é uma translação de  $\mathcal{S}^{2k}$ . O teorema acima implica que  $\lim_{k \rightarrow \infty} p_c(\mathcal{S}^k) \leq p_c$ . Temos portanto que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_c(\mathcal{S}^k) = p_c. \quad (1.5.2)$$

O resultado expresso em (1.5.2) será usado fortemente na Seção 3.1 do Capítulo 3.



---

# Percolação de palavras em modelos de longo alcance

---

Neste capítulo, que se baseia em [20], apresentamos os resultados obtidos relacionados ao problema de percolação de palavras. Em particular, mostramos que, dado  $p \in (0, 1)$ , o evento

$$\bigcup_{v \in \mathbb{Z}^d} \{\omega \in \Omega : S_v(\omega) = \Xi \text{ em } \mathcal{L}_K^d\}$$

ocorre  $P_p$  - quase certamente para alguma constante  $K = K(p)$ . Estabelecemos também alguns resultados sobre o comportamento assintótico de  $K(p)$  como uma função do parâmetro  $p$  quando  $p$  vai para zero.

O capítulo se divide da seguinte maneira. Na Seção 2.1 mostramos que, dado  $p \in (0, 1)$ , existe uma constante  $K(p)$  tal que todas as palavras podem ser vistas com probabilidade 1 no grafo truncado  $\mathcal{L}_K^d$ . A Seção 2 se divide em duas subseções. Na primeira delas, o resultado principal estabelece a escala correta entre a constante  $K(p)$  e  $p$  quando  $p$  vai para zero. Outros resultados também são apresentados nessa subseção. Na segunda subseção mostramos um resultado parcial para a escala entre a constante de truncamento  $K(p)$  e  $p$  quando  $p$  vai para zero, mas nesse caso o interesse é em ver quase todas as palavras  $P_p$  - quase certamente e não todas as palavras.

## 2.1 Todas palavras podem ser vistas

Em geral, o problema de ver todas as palavras é significativamente mais difícil do que o de ver quase todas as palavras. Como vimos na Seção 1.3 do Capítulo 1, sabe-se que para

$d \geq 3$ , quase todas as palavras são vistas em  $\mathcal{Z}^d P_{\frac{1}{2}}$  - quase certamente, ou seja

$$P_{\frac{1}{2}}\{\omega \in \Omega : \mu_{\frac{1}{2}}(S_{\infty}(\omega)) \text{ em } \mathcal{Z}^d\} = 1.$$

No entanto, em [3], como mencionado anteriormente, os autores mostram que o evento

$$\bigcup_{v \in \mathcal{Z}^d} \{\omega \in \Omega : S_v(\omega) = \Xi\}$$

ocorre  $P_{\frac{1}{2}}$  - quase certamente em um modelo independente de percolação de sítios em  $\mathcal{Z}^d$  para  $d \geq 10$ . Contudo, quando  $3 \leq d < 10$  não se sabe se todas as palavras são vistas quase certamente (veja Teorema 1 e o Problema Aberto 2 em [3]). Para outra ilustração, veja o Exemplo 2 no Capítulo 1.

Outro exemplo interessante é obtido considerando o grafo  $(\mathcal{Z}^2)^*$ , chamado de grafo Pacote Fechado, que é obtido a partir de  $\mathcal{Z}^2$  acrescentando as duas diagonais em cada uma de suas faces. Sabe-se que  $p_c^s((\mathcal{Z}^2)^*) = 1 - p_c^s(\mathcal{Z}^2) < \frac{1}{2}$ . Em [17], prova-se que nesse grafo todas as palavras são vistas  $P_p$  - quase certamente, para  $p \in ((1 - p_c^s(\mathcal{Z}^2), p_c^s(\mathcal{Z}^2)))$ .

A partir de agora, consideramos o problema de ver todas as palavras em um modelo de percolação de longo alcance em  $\mathcal{Z}^d$ . Como vimos na Seção 1.3, em [19] foi mostrado que  $\forall d \geq 2, \forall p \in (0, 1)$  existe um número inteiro positivo  $K = K(p)$ , tal que

$$P_p \left\{ \bigcup_{v \in \mathcal{V}} \{\omega \in \Omega : \xi \text{ é vista em } \mathcal{L}_K^d \text{ a partir de } v\} \right\} = 1, \quad \forall \xi \in \Xi. \quad (2.1.1)$$

Como visto no Capítulo 1, este fato juntamente com uma aplicação do Teorema de Fubini nos diz que quase todas as palavras, segundo a medida  $\mu_{\alpha}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ , são vistas  $P_p$  - quase certamente. Nesse mesmo trabalho o autor conjecturou se valeria um resultado mais forte, ou seja, se para todo  $p \in (0, 1)$ , existe  $K = K(p) \in \mathbb{N}$  tal que

$$P_p\{\omega \in \Omega : \exists v \in \mathcal{V} \text{ tal que } S_v(\omega) = \Xi \text{ em } \mathcal{L}_K^d\} = 1, \quad (2.1.2)$$

isto é, se todas as palavras podem ser vistas  $P_p$  - quase certamente.

Questões similares são consideradas em [10], mas no grafo  $\mathcal{L}_K^1$ , ou seja, quando  $d = 1$ . Nesse trabalho os autores mostram, entre outros resultados, que

$$P_p\{\omega \in \Omega : \mu(S_{\infty}(\omega)) = 1 \text{ em } \mathcal{L}_K^1\} = 0. \quad (2.1.3)$$

Em  $d = 1$ , ainda é um problema em aberto verificar se, dado  $p \in (0, 1)$ , existe uma constante  $K(p)$  tal que a Expressão (2.1.1) seja verdadeira ou se

$$P_p\{\omega \in \Omega : \mu(S_\infty(\omega)) = 1 \text{ em } \mathcal{L}_K^1\} = 0, \forall K \in \mathbb{N}.$$

O teorema que provaremos nos diz que, para  $d \geq 2$ , dado  $p \in (0, 1)$  qualquer, existe um inteiro positivo  $K$ , que depende de  $p$ , tal que podemos ver todas as palavras no grafo truncado  $\mathcal{L}_K^d$ ,  $P_p$  - quase certamente, respondendo à pergunta em [19]. O teorema também nos diz que todas as palavras podem ser vistas nesse grafo num conjunto de configurações  $\omega$  de probabilidade 1, a partir de um único vértice que depende da configuração  $\omega$ .

Provaremos esse teorema usando uma técnica de renormalização em uma escala. A demonstração consiste em particionar  $\mathbb{Z}^d$  em caixas de tamanho fixo  $M$ , e definir um evento específico associado a estas caixas. Se esse evento ocorre na configuração  $\omega$ , dizemos que a respectiva caixa é *boa* nessa configuração. Fazendo  $M$  arbitrariamente grande, mostraremos que a probabilidade desse evento é arbitrariamente próxima de 1. Desta forma, se as caixas *boas* percolam, espera-se a ocorrência de outro evento particular, que neste caso é o evento  $\{S_0 = \Xi\}$ . De maneira formal, temos o seguinte resultado

**Teorema 2.1.** *Para todo  $p \in (0, 1)$ , existe um inteiro positivo  $K = K(p)$ , tal que*

$$P_p\{\omega \in \Omega : S_0(\omega) = \Xi \text{ em } \mathcal{L}_K^d\} > 0$$

ou equivalentemente

$$P_p\left\{\bigcup_{v \in \mathbb{Z}^d} \{\omega \in \Omega : S_v(\omega) = \Xi \text{ em } \mathcal{L}_K^d\}\right\} = 1.$$

*Demonstração.* Dados  $n \in \mathbb{N}$  e  $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d$ , seja

$$\Lambda_x(n) = \{y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{Z}^d : 0 \leq y_i - nx_i \leq n - 1, \forall i = 1, \dots, d\} \quad (2.1.4)$$

a caixa hipercúbica de lado  $n$ . Para todo  $n \in \mathbb{N}$  o conjunto de caixas  $\{\Lambda_x(n) : x \in \mathbb{Z}^d\}$  forma uma partição de  $\mathbb{Z}^d$ .

Considere a rede renormalizada, isomorfa ao grafo  $\mathcal{Z}^d$ , cujos vértices são as caixas  $\{\Lambda_x(n) : x \in \mathbb{Z}^d\}$ . Dada uma configuração  $\omega \in \Omega$ , declaramos uma caixa como “*boa*” se todas suas linhas tem pelo menos um vértice ocupado e um vértice vazio nessa configuração.

Para ser preciso, a caixa  $\Lambda_x(n)$  será “boa” se, para todo  $i \in \{1, \dots, d\}$  e para toda sequência finita  $(l_j)_j$  com  $l_j \in \{0, \dots, n-1\}$  e  $j \in (\{1, \dots, d\} - \{i\})$  existem  $u, v \in L(i, (l_j)_j)$  tais que  $\omega_u = 1$  e  $\omega_v = 0$ , onde

$$L(i, (l_j)_j) = \{y \in \Lambda_x(n) : y_j = l_j + n \cdot x_j, \forall j \in \{1, \dots, d\} - \{i\}\}$$

são as linhas de  $\Lambda_x(n)$ . Seja  $\mathcal{Q}_{d,n}$  o conjunto cujos elementos são as linhas da caixa hipercúbica de tamanho  $n$  em dimensão  $d$ . Observe que  $|\mathcal{Q}_{d,n}| = dn^{d-1}$ . Defina uma ordem qualquer em  $\mathcal{Q}_{d,n}$  e denote seus elementos por  $L_k, k = 1, \dots, dn^{d-1}$ .

Considere os eventos

$$A_x(n) = \{\omega \in \Omega : \text{a caixa } \Lambda_x(n) \text{ é boa em } \omega\}, \quad \forall x \in \mathbb{Z}^d.$$

Como as caixas são disjuntas, todos eventos da coleção  $\{A_x(n) : x \in \mathbb{Z}^d\}$  são independentes e além disso tem a mesma probabilidade. Uma cota inferior para essa probabilidade é dada por

$$\begin{aligned} P_p\{A(n)\} &= 1 - P_p\{A(n)^c\} \\ &= 1 - P_p\left\{ \bigcup_{L_k \in \mathcal{Q}_{d,n}} \{\omega_v = 1 \forall v \in L_k\} \cup \{\omega_v = 0 \forall v \in L_k\} \right\} \\ &\geq 1 - dn^{d-1}(p^n + (1-p)^n). \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Tomando o limite quando  $n \rightarrow \infty$  na Expressão (2.1.5), temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_p\{A(n)\} = 1, \quad \forall p \in (0, 1).$$

Fixado  $p \in (0, 1)$ , seja  $N = N(p) = \min\{n \in \mathbb{N} : P_p(A(n)) > p_c(\mathbb{Z}^d)\}$ . Sendo assim, a origem da rede renormalizada percola com probabilidade estritamente positiva. Isto significa que, com probabilidade estritamente positiva, existe um caminho infinito  $(\Lambda_{x_0}(N), \Lambda_{x_1}(N), \Lambda_{x_2}(N), \dots)$  de vértices “bons” renormalizados, com

$$x_k = (x_{k,1}, \dots, x_{k,d}) \in \mathbb{Z}^d, \quad \|x_{k+1} - x_k\| = 1, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

e  $x_0 = (0, \dots, 0)$ . Aqui

$$\|x - y\| = \sum_{i=1}^d |x_i - y_i|. \quad (2.1.6)$$

A Figura 2.1 mostra uma configuração onde ocorre um caminho de caixas boas.

Observe que podemos ver todas as palavras simultaneamente ao longo desse caminho. Para ver isso formalmente, mantenha fixa uma configuração  $\omega \in \Omega$  onde este caminho infinito  $(\Lambda_{x_0}(N), \Lambda_{x_1}(N), \Lambda_{x_2}(N), \dots)$  de caixas *boas* ocorre.

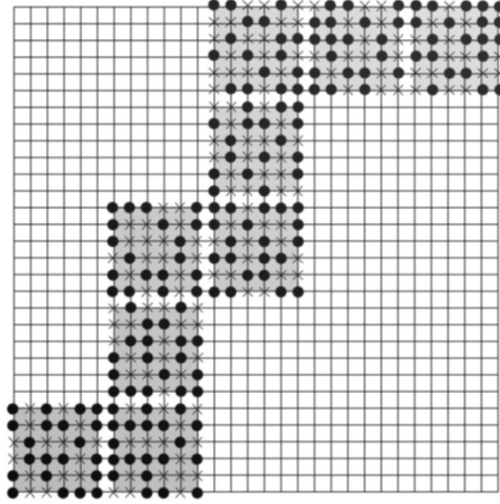


Figura 2.1: Em  $\mathbb{Z}^2$ , um caminho de caixas boas em cinza. Os vértices representados por “ $\times$ ” estão vazios enquanto que os representados por “ $\bullet$ ” estão ocupados. Em cada passo damos um salto de tamanho máximo igual a  $2N(p) - 1$

Dada qualquer palavra  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in \Xi$ , podemos ver seus dígitos ao longo de algum caminho  $\gamma = \langle v_0 = 0, v_1, v_2, \dots \rangle$  começando na origem da rede original. Para ver isso, definimos  $v_0$  como sendo a origem e os outros vértices são definidos indutivamente. Note que  $v_j = (v_{j,1}, v_{j,2}, \dots, v_{j,d})$ ,  $\forall j \in \mathbb{N}$ . Dado o vértice  $v_{k-1} \in \Lambda_{x_{k-1}}(N)$ , seja  $i_k \in \{1, \dots, d\}$  o único inteiro tal que  $|x_{k-1, i_k} - x_{k, i_k}| = 1$ . Como a caixa  $\Lambda_{x_k}(N)$  é boa, existe pelo menos um vértice  $v \in \Lambda_{x_k}(N)$  ao longo da linha  $L(i_k, (l_j)_j)$  tal que  $l_j = v_{k-1, j}, \forall j \neq i_k$  e tal que  $\omega_v = \xi_k$ . Escolha um desses vértices e o chame de  $v_k$ . Observe que  $v_{k-1}$  e  $v_k$  pertencem à mesma linha e  $\|v_{k-1} - v_k\|_1 \leq 2N - 1, \forall k \in \mathbb{N}$ .

Portanto, por esta construção, na configuração fixa  $\omega$ , temos que  $\xi_k = \omega_{v_k}, \forall k \in \mathbb{N}$ . Desta

forma, fazendo  $K(p) = 2N(p) - 1$  temos que

$$P_p\{\omega \in \Omega : S_0(\omega) = \Xi \text{ em } \mathcal{L}_K^d\} > 0.$$

Observe que

$$\bigcup_{v \in \mathbb{Z}^d} \{\omega \in \Omega : S_v(\omega) = \Xi \text{ em } \mathcal{L}_K^d\}$$

é o evento em que todas as palavras podem ser vistas em  $\mathcal{L}_K^d$  a partir de algum vértice  $v \in \mathbb{Z}^d$ . Observe que esse evento é invariante por translação, e portanto, por ergodicidade tem probabilidade 0 ou 1.

Como

$$\bigcup_{v \in \mathbb{Z}^d} \{\omega \in \Omega : S_v(\omega) = \Xi \text{ em } \mathcal{L}_K^d\} \supset \{\omega \in \Omega : S_0(\omega) = \Xi \text{ em } \mathcal{L}_K^d\},$$

temos

$$P_p \left\{ \bigcup_{v \in \mathbb{Z}^d} \{\omega \in \Omega : S_v(\omega) = \Xi \text{ em } \mathcal{L}_K^d\} \right\} \geq P_p\{\omega \in \Omega : S_0(\omega) = \Xi \text{ em } \mathcal{L}_K^d\} > 0.$$

Logo, segue a segunda afirmação do teorema. ■

*Observação:* A título de ilustração, considere o caso  $d = 2$ . Estimativas simples mostram que

$$P_{1/2}\{\Lambda(6) \text{ é boa}\} > p_c(\mathcal{Z}^2).$$

Portanto, pela continuidade da Expressão 2.1.5, podemos inferir que, existe  $\varepsilon > 0$  tal que, para  $p \in (1/2 - \varepsilon, 1/2 + \varepsilon)$ , temos  $P_p\{\omega \in \Omega : S_0(\omega) = \Xi \text{ em } \mathcal{L}_{11}^2\} > 0$ .

Podemos supor a partir de agora que

$$K(p) = \min\{L \in \mathbb{N} : P_p\{\omega \in \Omega : S_0(\omega) = \Xi \text{ em } \mathcal{L}_L^d\} > 0\},$$

ou seja,  $K(p)$  é a menor constante de truncamento tal que o Teorema 2.1 vale. Na próxima seção, estaremos interessados em estudar o comportamento assintótico de  $K(p)$  como função de  $p$ .

## 2.2 Qual a escala da constante $K(p)$ quando $p$ vai para zero?

Nesta seção estudaremos o comportamento assintótico da constante de truncamento  $K(p)$  quando  $p$  vai para zero. Problemas desse tipo têm sido amplamente estudados, por exemplo, em [1], os autores determinam a escala correta para o ponto crítico do modelo de percolação Bootstrap  $2D$  quando  $p$  vai para zero. Em um primeiro momento, gostaríamos de verificar esse comportamento quando o interesse é ver todas as palavras. Posteriormente, estudaremos o caso em que o interesse é ver quase todas as palavras.

### 2.2.1 Para ver todas as palavras

Passamos a estudar agora o problema de encontrar a escala correta entre  $K(p)$  e  $p$  quando  $p$  vai para zero ou quando  $p$  vai para um. Ou seja, dado um valor pequeno ou grande de  $p$ , esta escala nos dá uma idéia do tamanho necessário de  $K = K(p)$ , afim de que todas as palavras sejam vistas a partir da origem com probabilidade estritamente positiva em  $\mathcal{L}_K^d$ .

Observe que a constante  $K(p)$  é simétrica em torno de  $p = \frac{1}{2}$ , ou seja, se  $p > \frac{1}{2}$  temos

$$P_p\{\omega \in \Omega : S_0(\omega) = \Xi \text{ em } \mathcal{L}_K^d\} = P_{1-p}\{\omega \in \Omega : S_0(\omega) = \Xi \text{ em } \mathcal{L}_K^d\}.$$

Portanto, sem perda de generalidade podemos considerar o caso  $p \in (0, \frac{1}{2}]$ . Também é intuitiva a idéia de que  $K(p)$  é não crescente no intervalo  $(0, \frac{1}{2}]$  e atinge seu mínimo em  $p = \frac{1}{2}$ , pois nesse caso não há predominância de 0's ou 1's.

É natural esperar que  $K(p)$  vai para infinito quando  $p$  vai para zero. O próximo teorema, além de confirmar isso, fornece a escala correta entre  $K(p)$  e  $p$ . Os dois lemas a seguir são utilizados na demonstração do teorema mencionado.

**Lema 2.1.** *Se  $K = K(p) = 2\lfloor \frac{\lambda}{p} \rfloor$ , então para  $\lambda > -3 \ln(1 - p_c(\mathcal{Z}^d))$  temos que*

$$\lim_{p \rightarrow 0} P_p \left\{ \bigcup_{v \in \mathbb{Z}^d} \{\omega \in \Omega : S_v(\omega) = \Xi \text{ em } \mathcal{L}_K^d\} \right\} = 1. \quad (2.2.1)$$

*Demonstração.* A demonstração se baseia na técnica da construção dinâmica do aglomerado que formalizamos na Seção 1.4. Usaremos também a idéia de renormalização já apresentada

na demonstração do Teorema 2.1. Como o evento

$$\bigcup_{v \in \mathbb{Z}^d} \{\omega \in \Omega : S_v(\omega) = \Xi \text{ em } \mathcal{L}_K^d\}$$

é invariante por translação, é suficiente mostrar que existe algum  $p^* > 0$ , tal que para algum  $\lambda$  e para todo  $p \in (0, p^*)$ ,

$$P_p\{\omega \in \Omega : S_0(\omega) = \Xi \text{ em } \mathcal{L}_K^d\} > 0. \quad (2.2.2)$$

Dizemos que há uma *semente* no vértice  $v \in \mathbb{Z}^d$ , se  $\omega_v = 1$  e  $\omega_u = 0$   $\forall u \in \{s \in \mathbb{Z}^d : \|s - v\| = 1\}$ . Caso exista tal semente, dizemos que o vértice  $v$  é o seu *centro*. Note que

$$P_p\{\text{existe uma semente no vértice } v\} = (1 - p)^{2d}p, \quad (2.2.3)$$

e os eventos  $\{\text{existe uma semente no vértice } v_1\}$  e  $\{\text{existe uma semente no vértice } v_2\}$  são independentes se  $\|v_1 - v_2\| \geq 3$ .

Considere agora a partição de  $\mathbb{Z}^d$ ,  $\{\Lambda_x(n) : x \in \mathbb{Z}^d\}$  que definimos em (2.1.4). Usaremos letras minúsculas para denotar vértices da rede renormalizada. A idéia é construir, dinamicamente, uma sequência  $(R_x, x \in U \subset \mathbb{Z}^d)$  de variáveis aleatórias  $\{0, 1\}$  e uma sequência  $(D_i, E_i), i = 0, 1, \dots$  de pares de subconjuntos ordenados de  $\mathbb{Z}^d$ .

Primeiramente, seja  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}^d$  uma ordem fixa dos vértices de  $\mathbb{Z}^d$  e defina  $(D_0, E_0) = (\emptyset, \emptyset)$ . Seja  $x_0 = 0$  a origem de  $\mathbb{Z}^d$ . Dizemos que  $R_{x_0} = 1$  se pelo menos um dos  $d(n - 1)$  vértices no conjunto

$$T_{x_0} = \{v = (v_1, \dots, v_d) \in \mathbb{Z}^d : \exists! i \in \{1, \dots, d\} \text{ com } v_i \in \{1, \dots, n - 1\}$$

$$\text{e } v_j = 0, \forall j \neq i\}$$

é o centro de alguma semente, isto é, se  $\exists v \in T_{x_0}$  com  $\omega_v = 1$  e  $\omega_u = 0$ , para todo  $u$  tal que  $\|v - u\| = 1$ . Caso contrário, dizemos que  $R_{x_0} = 0$ .

Observe que

$$P_p\{R_{x_0} = 1\} = 1 - P_p\{R_{x_0} = 1\}^c = 1 - P_p\left\{\bigcap_{v \in T_{x_0}} \{v \text{ não é centro de semente}\}\right\}$$



$$\begin{aligned} &\geq 1 - P_p \left\{ \bigcap_{\substack{v, u \in T_{x_0} \\ \|v-u\| \geq 3}} \{v \text{ não é centro de semente}\} \right\} \\ &= 1 - \prod_{\substack{v, u \in T_{x_0} \\ \|v-u\| \geq 3}} P_p \{v \text{ não é centro de semente}\} \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

$$= 1 - [1 - p(1-p)^{2d}]^{\lfloor \frac{d(n-1)}{3} \rfloor} \quad (2.2.5)$$

$$\geq 1 - [1 - p(1-p)^{2d}]^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}. \quad (2.2.6)$$

A Equação (2.2.4) segue por independência e a Equação (2.2.5) é obtida com a observação de que  $|\{v, u \in T_{x_0} : \|v - u\| \geq 3\}| = \lfloor \frac{(d-1)n}{3} \rfloor$ . Agora, defina

$$(D_1, E_1) = \begin{cases} (D_0 \cup \{x_0\}, E_0) & \text{se } R_{x_0} = 1, \\ (D_0, E_0 \cup \{x_0\}) & \text{se } R_{x_0} = 0, \end{cases} \quad (2.2.7)$$

e se  $R_{x_0} = 1$  defina  $z(x_0)$  como o centro de alguma semente pertencente a  $T_{x_0}$ .

Suponha que temos o par  $(D_i, E_i)$  definido. Se  $\partial(D_i) \cap E_i^c = \emptyset$ , defina

$$(D_j, E_j) = (D_i, E_i), \quad \forall j > i,$$

onde

$$\partial(A) = \{v \in \mathbb{Z}^d : v \in A^c \text{ e } \exists u \in A \text{ com } \|v - u\| = 1\}.$$

Caso contrário, seja  $x_i$  o primeiro vértice na ordem fixada pertencente a  $\partial(D_i) \cap E_i^c$  e defina  $y_i$  como sendo qualquer vértice pertencente a  $D_i$  tal que  $\|x_i - y_i\| = 1$  (observe que  $y_1 = x_0$ ).

Dizemos que  $R_{x_i} = 1$ , se pelo menos um dos  $n - 2$  vértices do conjunto

$$T_{x_i} = \tilde{\Lambda}_{x_i} \cap \{z(y_i) + j\bar{e}_{x_i - y_i}; j \in \mathbb{Z}\}$$

é o centro de alguma semente, isto é, se  $\exists v \in T_{x_i}$  com  $\omega_v = 1$  e  $\omega_u = 0$ ,  $\forall u \in \{s \in \mathbb{Z}^d : \|s - v\| = 1\}$ . Aqui,  $\bar{e}_l$  denota o vetor unitário de  $\mathbb{Z}^d$  na  $l$ -ésima direção e  $\tilde{\Lambda}_x = \{y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{Z}^d : 2 \leq y_i - nx_i \leq n - 1, \forall i = 1, \dots, d\}$ . Caso contrário, dizemos que  $R_{x_i} = 0$ . Note que a maneira como definimos  $\tilde{\Lambda}_{x_i}$  assegura a independência da sequência  $(R_{x_i}, i = 0, 1, \dots)$ .

Defina

$$(D_{i+1}, E_{i+1}) = \begin{cases} (D_i \cup \{x_i\}, E_i) & \text{se } R_{x_i} = 1, \\ (D_i, E_i \cup \{x_i\}) & \text{se } R_{x_i} = 0, \end{cases} \quad (2.2.8)$$

e se  $R_{x_i} = 1$  defina  $z(x_i)$  como o centro de alguma semente pertencente a  $T_{x_i}$ .

Com um raciocínio similar ao que fizemos antes, podemos concluir que

$$P_p(R_{x_i} = 1 | R_{x_j}, \forall j < i) \geq 1 - [1 - p(1 - p)^{2d}]^{\lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor}.$$

Fazendo  $n = \lfloor \frac{\lambda}{p} \rfloor$ , observe que

$$\lim_{p \rightarrow 0} [1 - [1 - p(1 - p)^{2d}]^{\lfloor \frac{1}{3}(\lfloor \frac{\lambda}{p} \rfloor - 2) \rfloor}] = 1 - \exp(-\frac{\lambda}{3}).$$

Dessa forma podemos escolher  $\lambda > -3 \ln(1 - p_c(\mathcal{Z}^d))$  grande o suficiente e  $p^*$  pequeno suficiente, tal que

$$1 - [1 - p(1 - p)^{2d}]^{\lfloor \frac{1}{3}(\lfloor \frac{\lambda}{p} \rfloor - 2) \rfloor} \geq C > 1 - \exp(\frac{3 \ln(1 - p_c(\mathcal{Z}^d))}{3}) = p_c(\mathcal{Z}^d), \forall p \in (0, p^*), \quad (2.2.9)$$

onde  $C$  é uma constante.

Devido às escolhas de  $\lambda, p$  e  $n$ , temos

$$P_p(R_{x_i} = 1 | R_{x_j}, \forall j < i) \geq C > p_c(\mathcal{Z}^d), \forall i \in \mathbb{N},$$

e portanto o processo  $(R_{x_i}, i = 0, 1, \dots)$  domina um processo de percolação de sítios i.i.d. com parâmetro estritamente maior que  $p_c(\mathcal{Z}^d)$ . O Teorema 1.5 implica então que  $P_p\{|\cup_{i \in \mathbb{N}} D_i| = \infty\} > 0$  e por construção, no evento  $\{|\cup_{i \in \mathbb{N}} D_i| = \infty\}$ , todas palavras podem ser vistas ao longo de algum caminho auto-evitante  $(0, v_1, v_2, \dots)$  com  $v_i$  pertencendo a alguma semente para todo  $i \in \mathbb{N}$ , como mostraremos a seguir. Portanto, (2.2.2) está provado com  $K(p) = 2 \lfloor \frac{\lambda}{p} \rfloor$ .

Quando ocorre o evento  $\{|\cup_{i \in \mathbb{N}} D_i| = \infty\}$ , é possível tomar uma sequência de caixas adjacentes  $\Lambda_{x_{i_0}}, \Lambda_{x_{i_1}}, \Lambda_{x_{i_2}}, \dots$ , com  $x_{i_0} = x_0 = 0$ , tal que  $R(x_{i_j}) = 1, \forall j \in \mathbb{N}$ , e  $z(x_{i_j}) - z(x_{i_{j-1}}) = m\bar{e}_l$  para algum  $m \in \mathbb{Z}$  e  $l \in \{1, \dots, d\}$ . Isto é, sementes em caixas adjacentes tem os respectivos centros pertencentes à mesma linha. Para simplificar a notação, denote  $x_{i_j}$  by  $w_j$ .

Dada qualquer palavra  $\xi \in \Xi$ , defina  $l_1 = \min\{i : \xi_i = 1\}$  e  $l_j = \min\{i > l_{j-1} : \xi_i = 1\}$  para  $j \geq 2$ . Se  $l_1 = 1$ , defina  $v_1 = z(w_0)$ ; se  $l_1 > 1$ , defina  $v_i = z(w_{i-1}) - \bar{e}_b, \forall i < l_1$  e  $v_{l_1} = z(w_{l_1-2})$ , onde  $b$  é a única direção tal que o produto interno  $\langle \bar{e}_b \cdot z(w_0) \rangle$  é diferente de zero. Então, por construção, a palavra finita  $(\xi_1, \dots, \xi_{l_1})$  é vista ao longo do caminho  $(0, v_1, \dots, v_{l_1})$ . Defina  $I(1)$  como o índice tal que  $v_{l_1} = z(w_{I(1)})$  (observe que  $I(1) = 0$  se

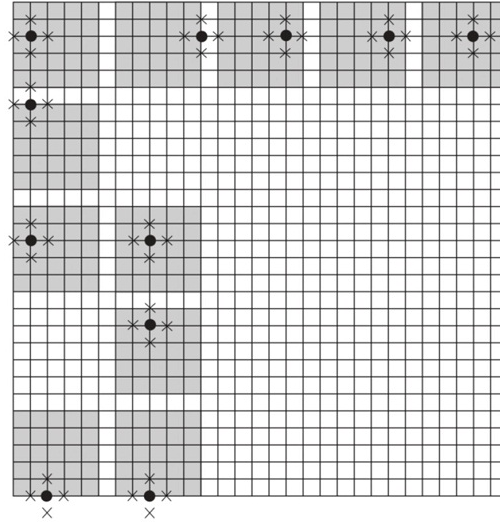


Figura 2.2: Em  $\mathbb{Z}^2$ , um caminho de caixas adjacentes com suas respectivas sementes. Os vértices representados por “ $\times$ ” estão vazios enquanto que os representados por “ $\bullet$ ” estão ocupados. Em cada passo damos um salto de tamanho máximo igual a  $2\lfloor \frac{\lambda}{p} \rfloor$

$l_1 = 1$  e  $I(1) = l_1 - 2$  se  $l_1 \geq 2$ ).

Agora, descrevemos o passo de indução. Suponha que a palavra finita  $(\xi_1, \dots, \xi_{l_k})$  seja vista ao longo do caminho  $(0, v_1, \dots, v_{l_k})$ ,  $\forall k \geq 1$ . Se  $l_{k+1} = l_k + 1$ , defina  $v_{l_{k+1}} = z(w_{I_{k+1}})$ ; se  $l_{k+1} > l_k + 1$ , defina  $v_i = z(w_{I(k)+i-l_k}) - \bar{e}_{w_{I(k)}-w_{I(k)+1}}$ ,  $\forall l_k < i < l_{k+1}$  e  $v_{l_{k+1}} = z(w_{I(k)+l_{k+1}-1-l_k})$ . Portanto, por construção, a palavra finita  $(\xi_1, \dots, \xi_{l_{k+1}})$  é vista ao longo do caminho  $(0, v_1, \dots, v_{l_{k+1}})$ . Defina  $I(k+1)$  como o índice tal que  $v_{l_{k+1}} = z(w_{I(k+1)})$  (observe que  $I(k+1) = I(k) + 1$  se  $l_{k+1} = l_k + 1$  e  $I(k+1) = I(k) + l_{k+1} - l_k - 1$  se  $l_{k+1} > l_k + 1$ ).

Dessa forma, construímos o caminho  $(0, v_1, v_2, \dots)$ , de tal maneira que  $\omega_{v_i} = \xi_i$ , para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Isso completa a prova do lema.  $\blacksquare$

**Lema 2.2.** Se  $K = K(p) = \lfloor \frac{\lambda}{p} \rfloor$  com  $\lambda < \frac{1}{2d}$ , então

$$\lim_{p \rightarrow 0} P_p \left\{ \bigcup_{v \in \mathbb{Z}^d} \{\omega \in \Omega : S_v(\omega) = \Xi \text{ em } \mathcal{L}_K^d\} \right\} = 0. \quad (2.2.10)$$

*Demonstração.* Para o regime subcrítico, com um argumento padrão mostraremos que para  $\lambda < (2d)^{-1}$  a palavra  $\bar{1} = (1, 1, \dots)$  não percola. Seja  $\sigma_m^K$  o número de caminhos auto-evitantes de tamanho  $m$  começando a partir da origem no grafo  $\mathcal{L}_K^d$ , e seja  $M_m^K$  o

número de tais caminhos que são ocupados. É claro que, se a palavra  $\bar{1}$  pode ser vista a partir da origem, então existem caminhos ocupados de todos tamanhos começando a partir da origem. Isso implica que,  $\forall m \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} P_p\{\omega \in \Omega : \bar{1} \in S_0(\omega) \text{ em } \mathcal{L}_K^d\} &\leq P_p\{\omega \in \Omega : M_m^K(\omega) \geq 1 \text{ em } \mathcal{L}_K^d\} \\ &\leq \mathbb{E}(M_m^K) = p^m \sigma_m^K \leq (p2dK)^m, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

A segunda desigualdade segue da Desigualdade de Chebyshev, enquanto que a última é consequência do fato de que, para se obter um caminho auto-evitante, cada novo passo tem no máximo  $2dK$  escolhas possíveis. Portanto,

$$P_p\{\omega \in \Omega : \bar{1} \in S_0(\omega) \text{ em } \mathcal{L}_K^d\} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} (p2dK)^m.$$

Dessa forma, se  $K < \frac{1}{2dp}$ , então

$$P_p\{\omega \in \Omega : \bar{1} \in S_0(\omega) \text{ em } \mathcal{L}_K^d\} = 0,$$

isto é,

$$P_p \left\{ \bigcup_{v \in \mathbb{Z}^d} \{\omega \in \Omega : S_v(\omega) = \Xi \text{ em } \mathcal{L}_K^d\} \right\} = 0.$$

■

Os dois lemas anteriores fornecem o resultado seguinte.

**Teorema 2.2.** *Existe uma constante  $\lambda_0 \in (\frac{1}{2d}, -6 \ln(1 - p_c(\mathcal{Z}^d)))$  tal que se  $K(p) = \lfloor \frac{\lambda}{p} \rfloor$ , então*

$$\lim_{p \rightarrow 0} P_p \left\{ \bigcup_{v \in \mathbb{Z}^d} \{\omega \in \Omega : S_v(\omega) = \Xi \text{ em } \mathcal{L}_{K(p)}^d\} \right\} = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda < \lambda_0, \\ 1 & \text{se } \lambda > \lambda_0. \end{cases} \quad (2.2.11)$$

*Demonstração.* Observe que  $P_p \left\{ \bigcup_{v \in \mathbb{Z}^d} \{\omega \in \Omega : S_v(\omega) = \Xi \text{ em } \mathcal{L}_{\lfloor \frac{\lambda}{p} \rfloor}^d\} \right\}$  é crescente em  $\lambda$ . Para ver isso, tome  $\lambda_1 < \lambda_2$  e note que,  $\forall p \in (0, 1)$ ,

$$P_p \left\{ \bigcup_{v \in \mathbb{Z}^d} \{\omega \in \Omega : S_v(\omega) = \Xi \text{ em } \mathcal{L}_{K_1}^d\} \right\} \leq P_p \left\{ \bigcup_{v \in \mathbb{Z}^d} \{\omega \in \Omega : S_v(\omega) = \Xi \text{ em } \mathcal{L}_{K_2}^d\} \right\},$$

onde  $K_i = \lfloor \frac{\lambda_i}{p} \rfloor$ . Observe também que o evento

$$\bigcup_{v \in \mathbb{Z}^d} \{\omega \in \Omega : S_v(\omega) = \Xi \text{ em } \mathcal{L}_K^d\}$$

é invariante por translação e portanto tem probabilidade 0 ou 1. Portanto, a prova desse teorema segue dos Lemas 2.1 e 2.2. ■

*Observação:* A conclusão do Teorema 2.2 permanece a mesma substituindo o evento  $\bigcup_{v \in \mathbb{Z}^d} \{\omega \in \Omega : S_v(\omega) = \Xi \text{ em } \mathcal{L}_K^d\}$  por  $\{\omega \in \Omega : S_\infty(\omega) = \Xi \text{ em } \mathcal{L}_K^d\}$ . No entanto, a constante  $\lambda_0$  deve ser diferente.

Considere novamente o evento

$$A_0(n) = \{\omega \in \Omega : \text{a caixa } \Lambda_0(n) \text{ é boa em } \omega\},$$

onde

$$\Lambda_0(n) = \{y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{Z}^d : 0 \leq y_i \leq n-1, \forall i = 1, \dots, d\}.$$

Observe que no Lema 2.1 fizemos uma construção mais refinada que no Teorema 2.1. É razoável esperar então que a escala para  $n(p)$  em relação ao evento mencionado acima fosse maior que aquela dada pelo Teorema 2.2, a fim de que todas as palavras fossem vistas  $P_p$  - quase certamente. De fato essa expectativa é confirmada e a observação que fazemos abaixo fornece a escala para percolação de caixas boas.

*Observação:* Se  $n = n(p) = \lfloor \frac{-\beta \ln p}{p} \rfloor$ , então

$$\lim_{p \rightarrow 0} P_p \{A_0(n)\} = \begin{cases} 1 & \text{se } \beta > d-1, \\ 0 & \text{se } \beta \leq d-1. \end{cases} \quad (2.2.12)$$

Para ver isso, considere o seguinte argumento: para  $i \in \{1, \dots, d\}$  defina os eventos

$$C_0^i(n) = \{\omega \in \Omega : \forall (l_j)_j \text{ com } l_j \in \{0, 1, \dots, n-1\} \text{ e } j \in \{1, \dots, d\} - \{i\}$$

$$\text{existe } z \in L(i, (l_j)_j) \text{ tal que } \omega_z = 1\}$$

e

$$B_0(n) = \bigcap_{i=1}^d C_0^i(n),$$

onde, como anteriormente,

$$L(i, (l_j)_j) = \{y \in \Lambda_0(n) : y_j = l_j, \forall j \in \{1, \dots, d\} - \{i\}\}$$

são as linhas de  $\Lambda_0(n)$ . Observe que  $C_0^i(n)$  é o evento em que todas as linhas de  $\Lambda_0(n)$  paralelas ao eixo coordenado na direção  $i$  tem pelo menos um vértice ocupado e  $B_0(n)$  é o evento em que todas as linhas de  $\Lambda_0(n)$  tem pelo menos um vértice ocupado. Veja então que o evento  $\{B_0(n) \setminus A_0(n)\}$  é aquele em que pelo menos uma linha de  $\Lambda_0(n)$  é formada apenas por vértices ocupados. Portanto

$$\begin{aligned} P_p \{B_0(n) \setminus A_0(n)\} &= P_p \left\{ \bigcup_{L_k \in \mathcal{Q}_{d,n}} \{\omega_a = 1, \forall a \in L_k\} \right\} \\ &\leq dn^{d-1} p^n, \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

e logo

$$\lim_{p \rightarrow 0} P_p \{B_0(n) \setminus A_0(n)\} = 0. \quad (2.2.14)$$

A desigualdade em (2.2.13) segue pois em  $A_0(n)$  existem  $dn^{d-1}$  linhas e a probabilidade de cada uma delas ser formada em sua totalidade por vértices ocupados é  $p^n$ .

Como os eventos  $C_0^i(n)$  são crescentes e equiprováveis, para todo  $i \in \{1, \dots, d\}$ , o Teorema 1.4 nos dá a primeira desigualdade em

$$[P_p \{C_0^1(n)\}]^d \leq P_p \{B_0(n)\} \leq P_p \{C_0^1(n)\}. \quad (2.2.15)$$

A segunda segue por continência. Portanto, usando (2.2.14) e (2.2.15) é suficiente provar (2.2.12) substituindo o evento  $A_0(n)$  por  $C_0^1(n)$ .

Mas

$$P_p \{C_0^1(n)\} = [1 - (1 - p)^n]^{n^{d-1}}.$$

Logo, quando  $n = n(p) = \lfloor \frac{-\beta \ln p}{p} \rfloor$  temos

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} P_p \{C_0^1(n)\} &= \lim_{p \rightarrow 0} [1 - (1 - p)^{\lfloor \frac{-\beta \ln p}{p} \rfloor}]^{\lfloor \frac{-\beta \ln p}{p} \rfloor^{d-1}} \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \exp[-(-\beta \ln p)^{d-1} p^{\beta-(d-1)}] = \begin{cases} 1, & \text{se } \beta > d - 1, \\ 0, & \text{se } \beta \leq d - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Como consequência dos Lemas 2.1 e 2.2, obtemos precisamente a escala da constante de truncamento  $K(p)$  quando  $p$  vai para zero para percolação usual.

**Corolário 2.1.** *Existe uma constante  $\lambda_0 \in (\frac{1}{2d}, -2\ln(1 - p_c(\mathcal{Z}^d)))$  tal que se  $K(p) = \lfloor \frac{\lambda}{p} \rfloor$ , então*

$$\lim_{p \rightarrow 0} P_p \left\{ \bigcup_{v \in \mathbb{Z}^d} \{\omega \in \Omega : \vec{1} \text{ é vista em } \omega \text{ em } \mathcal{L}_K^d \text{ a partir de } v\} \right\} = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda < \lambda_0 \\ 1 & \text{se } \lambda > \lambda_0. \end{cases} \quad (2.2.16)$$

*Demonstração.* É suficiente observar que

$$P_p \left\{ \bigcup_{v \in \mathbb{Z}^d} \{\omega \in \Omega : \vec{1} \text{ é vista em } \omega \text{ em } \mathcal{L}_{\lfloor \frac{\lambda}{p} \rfloor}^d \text{ a partir de } v\} \right\}$$

é crescente em  $\lambda$  e tem probabilidade 0 ou 1, por invariância translacional. Isso poder ser visto com o mesmo argumento usado na demonstração do Teorema 2.2. Pelo Lema 2.2, temos que  $\lambda_0 > \frac{1}{2d}$  e com uma simples modificação na prova do Lema 2.1 pode-se mostrar que

$$\lambda_0 < -2\ln(1 - p_c(\mathcal{Z}^d)).$$

■

*Observação:* Em [15], o autor mostra que  $\lim_{d \rightarrow \infty} 2dp_c(\mathcal{Z}^d) = 1$ . Portanto essa constante  $\lambda_0$  deve ser tal que  $\frac{1}{2} < \lim_{d \rightarrow \infty} d\lambda_0 \leq 1$ .

### 2.2.2 Para ver quase todas as palavras

Nosso interesse a partir de agora é estudar a mesma questão discutida acima, porém agora nosso foco está no evento

$$\bigcup_{v \in \mathbb{Z}^d} \{\omega \in \Omega : \mu_\alpha(S_v(\omega)) = 1 \text{ em } \mathcal{L}_K^d\}.$$

Aqui,

$$\mu_\alpha = \prod_{i=1}^{\infty} \nu_i,$$

onde para cada  $i$

$$\nu_i(1) = 1 - \nu_i(0) = \alpha, \text{ para algum } 0 < \alpha < 1.$$

Nosso interesse é obter um resultado similar ao Teorema 2.2, ou seja, gostaríamos de obter a escala entre a constante de truncamento  $K(p)$  e  $p$  quando  $p$  vai para zero a fim de que

$$\lim_{p \rightarrow 0} P_p \left\{ \bigcup_{v \in \mathbb{Z}^d} \{\omega \in \Omega : \mu_\alpha(S_v(\omega)) = 1 \text{ em } \mathcal{L}_K^d\} \right\} = 1.$$

Observe que quando  $\alpha = 0$ , temos percolação da palavra  $\vec{0}$ , e portanto podemos tomar  $K = 1$ . Quando  $\alpha = 1$ , temos percolação da palavra  $\vec{1}$  e a escala é dada pelo corolário 2.1. Para  $\alpha$  qualquer, não sabemos se a escala é diferente daquela dada pelo Teorema 2.2, ou se apenas a constante  $\lambda_0$  deveria mudar. De qualquer maneira, conseguimos um resultado parcial, que fornece uma cota inferior para  $K(p)$  que depende de  $\alpha$ .

**Teorema 2.3.** *Seja  $0 < \alpha < 1$ . Então, para todo  $\epsilon > 0$  e  $K(p) < \frac{1}{2d} \frac{1}{p^{\alpha-\epsilon}}$ , temos*

$$\lim_{p \rightarrow 0} P_p \left\{ \bigcup_{v \in \mathbb{Z}^d} \{\omega \in \Omega : \mu_\alpha(S_v(\omega)) = 1 \text{ em } \mathcal{L}_K^d\} \right\} = 0. \quad (2.2.17)$$

*Demonstração.* Dados  $\epsilon > 0$  e  $N_0 \in \mathbb{N}$ , considere o subconjunto de palavras

$$A_{N_0}^\epsilon = \left\{ \xi \in \Xi : \left| \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} - \alpha \right| < \epsilon, \forall n \geq N_0 \right\}.$$

Afirmamos que  $\mu_\alpha(A_{N_0}^\epsilon) \rightarrow 1$  quando  $N_0 \rightarrow \infty$ . Para ver isso, note que, para todo  $N_0$ ,  $A_{N_0}^\epsilon \subset A_{N_0+1}^\epsilon$ . Isto implica que

$A_{N_0}^\epsilon \uparrow A_\infty^\epsilon = \left\{ \bigcup_{N_0=1}^\infty A_{N_0}^\epsilon \right\}$  e  $\mu_\alpha\{A_{N_0}^\epsilon\} \rightarrow \mu_\alpha\left\{ \bigcup_{N_0=1}^\infty A_{N_0}^\epsilon \right\}$  quando  $N_0 \rightarrow \infty$ . Pela Lei dos Grandes Números, para todo  $\epsilon > 0$ , existe um  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que,

$$\left| \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} - \alpha \right| < \epsilon, \quad \forall n \geq n_0,$$

exceto para  $\xi$  em um conjunto  $N$  tal que  $\mu_\alpha(N) = 0$ . Isto implica que  $\mu_\alpha(A_\infty^\epsilon) = 1$ .

Em  $A_{N_0}^\epsilon$ , temos

$$(\alpha - \epsilon)n \leq \sum_{i=1}^n \xi_i \leq (\alpha + \epsilon)n \quad (2.2.18)$$

para qualquer  $n \geq N_0$ . Para  $\xi \in \Xi$ , denotamos  $\xi^{(n)} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ . Então, para todo  $n \geq N_0$ , temos

$$\{\omega \in \Omega : S_0(\omega) \cap A_{N_0}^\epsilon \neq \emptyset \text{ em } \mathcal{L}_K^d\} \quad (2.2.19)$$



$$\subset \bigcup_{\substack{\gamma:|\gamma|=n \\ \xi^{(n)}:\xi \in A_{N_0}^\varepsilon}} \{\omega \in \Omega : \xi^{(n)} \text{ é vista em } \omega \text{ ao longo do caminho } \gamma \text{ em } \mathcal{L}_K^d\},$$

onde a união é sobre todos caminhos auto-evitantes de tamanho  $n$  em  $\mathcal{L}_K^d$  que começam na origem. Portanto, para todo  $n \geq N_0$ , temos

$$P_p\{\omega \in \Omega : S_0(\omega) \cap A_{N_0}^\varepsilon \neq \emptyset \text{ em } \mathcal{L}_K^d\} \leq \sum_{\substack{\gamma:|\gamma|=n \\ \xi^{(n)}:\xi \in A_{N_0}^\varepsilon}} p^{\sum_{i=1}^n \xi_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^n \xi_i}. \quad (2.2.20)$$

De (2.2.18), temos que

$$P_p\{\omega \in \Omega : S_0(\omega) \cap A_{N_0}^\varepsilon \neq \emptyset \text{ em } \mathcal{L}_K^d\} \leq (2dK)^n 2^n p^{(\alpha-\varepsilon)n} (1-p)^{n-(\alpha+\varepsilon)n}. \quad (2.2.21)$$

Portanto, se

$$4dKp^{\alpha-\varepsilon}(1-p)^{1-\alpha-\varepsilon} < 1, \quad (2.2.22)$$

então

$$P_p\{\omega \in \Omega : S_0(\omega) \cap A_{N_0}^\varepsilon = \emptyset\} = 1, \quad \forall N_0 \in \mathbb{N}. \quad (2.2.23)$$

Observe que  $(1-p)^{\alpha+\varepsilon-1} < 2$  para  $p$  suficientemente pequeno, digamos  $p < p^*$ . Assim, a Expressão (2.2.23) continua verdadeira sempre que

$$K < \frac{1}{2dp^{\alpha-\varepsilon}}, \quad \forall p < p^*. \quad (2.2.24)$$

Afirmamos que

$$P_p\{\omega \in \Omega : S_0(\omega) \cap A_\infty^\varepsilon = \emptyset\} = 1, \quad \forall p < p^*.$$

Para ver isto, defina

$$Z_{N_0} = \{\omega \in \Omega : S_0(\omega) \cap A_{N_0}^\varepsilon = \emptyset\},$$

e observe que  $\{Z_{N_0}\}_{N_0 \geq 1}$  é uma sequência decrescente. Isto implica que  $Z_{N_0} \downarrow \bigcap_{N_0=1}^{\infty} Z_{N_0} = Z_\infty$   
e

$$P_p\{Z_\infty\} = \lim_{N_0 \rightarrow \infty} P_p\{Z_{N_0}\} = 1.$$

Nos resta mostrar que  $Z_\infty = \{\omega \in \Omega : S_0(\omega) \cap A_\infty^\epsilon = \emptyset\}$ . Porém, isto segue das implicações

$$\omega \in \bigcap_{N_0=1}^{\infty} Z_{N_0} \Leftrightarrow \forall N_0 \in \mathbb{N}, S_0(\omega) \cap A_{N_0}^\epsilon = \emptyset \Leftrightarrow \bigcup_{N_0=1}^{\infty} (S_0(\omega) \cap A_{N_0}^\epsilon) = \emptyset \Leftrightarrow S_0(\omega) \cap A_\infty^\epsilon = \emptyset.$$

Portanto,

$$P_p\{\omega \in \Omega : S_0(\omega) \cap A_\infty^\epsilon = \emptyset\} = 1, \quad \forall p < p^*.$$

Como  $\mu_\alpha(A_\infty^\epsilon) = 1$ , concluímos que

$$P_p\{\omega \in \Omega : \mu_\alpha(S_0(\omega)) = 1\} = 0, \quad \forall p < p^*.$$

Por invariância translacional temos

$$P_p\left\{\bigcup_{v \in \mathbb{Z}^d} \{\omega \in \Omega : \mu_\alpha(S_v(\omega)) = 1\}\right\} = 0, \quad \forall p < p^*.$$

■

Como mencionado anteriormente, gostaríamos de provar um teorema similar ao Teorema 2.2. O teorema acima nos dá informação em um sentido, mas não é suficiente para determinar a escala correta da constante  $K(p)$  quando  $p$  vai para zero. No entanto, acreditamos no seguinte:

**Conjectura:** Seja  $0 < \alpha < 1$ . Então, para todo  $\epsilon > 0$  e  $K(p) = \lfloor \frac{1}{p^{\alpha+\epsilon}} \rfloor$ , temos

$$\lim_{p \rightarrow 0} P_p \left\{ \bigcup_{v \in \mathbb{Z}^d} \{\omega \in \Omega : \mu_\alpha(S_v(\omega)) = 1 \text{ em } \mathcal{L}_K^d\} \right\} = 1. \quad (2.2.25)$$

Note que, ainda que seja verdadeira a conjectura acima, ela não determina a escala correta completamente. Pode-se perguntar então, se existe uma constante  $\lambda_0 \in (0, \infty)$  tal que, se  $K(p) = \lfloor \frac{\lambda}{p^\alpha} \rfloor$ , então

$$\lim_{p \rightarrow 0} P_p \left\{ \bigcup_{v \in \mathbb{Z}^d} \{\omega \in \Omega : \mu_\alpha(S_v(\omega)) = 1 \text{ em } \mathcal{L}_K^d\} \right\} = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda < \lambda_0, \\ 1 & \text{se } \lambda > \lambda_0. \end{cases} \quad (2.2.26)$$

## *Ponto Crítico e Probabilidade de Percolação em Modelos de Longo Alcance*

Neste capítulo, que é baseado em [21], estudaremos o comportamento da probabilidade de percolação  $\theta(p)$  em um certo grafo com elos de longo alcance. Esses alcances obedecerão a uma regra específica e o interesse principal é verificar como se comporta  $\theta(p)$  em função desses alcances. Estudaremos também questões relacionadas ao ponto crítico desse grafo com longo alcance. Em particular, obtemos um teorema que caracteriza esse ponto crítico quando o comprimento dos elos de longo alcance vai para o infinito.

A motivação para estudar esse assunto vem do seguinte problema, que foi proposto por E. Andjel.

Considere o grafo  $\mathcal{G} = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{E})$ ,  $d \geq 2$ , onde  $\mathcal{E} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n$  e  $\mathcal{E}_n$  é dado em (1.3.1). Dada uma sequência  $(p_n \in [0, 1], n \in \mathbb{N})$  considere um modelo de percolação de elos independente onde cada elo de comprimento  $k$  está aberto com probabilidade  $p_n$  e assumamos que  $\sum_{n \in \mathbb{N}} p_n = \infty$ . Formalmente, considere o espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , onde  $\Omega = \{0, 1\}^{\mathcal{E}}$ ,  $\mathcal{F}$  é a  $\sigma$ -álgebra apropriada e  $P = \prod_{\langle u, v \rangle \in \mathcal{E}} \mu_{\langle u, v \rangle}$ , onde

$$\mu_{\langle u, v \rangle} \{\omega_{\langle u, v \rangle} = 1\} = p_{\|u-v\|}$$

são medidas de Bernoulli independentes. Observe que uma aplicação do Lema de Borel-Cantelli nos diz que a origem desse grafo percola com probabilidade 1. Dado  $K \in \mathbb{N}$ , considere a sequência truncada  $(p_{K,n})_{n \in \mathbb{N}}$  em  $K$

$$p_{K,n} = \begin{cases} p_n & \text{se } n \leq K, \\ 0 & \text{se } n > K. \end{cases}$$

Considere também o processo truncado  $(\Omega, \mathcal{F}, P_K)$  onde  $P_K = \prod_{\langle u,v \rangle \in \mathcal{E}} \mu_{K, \langle u,v \rangle}$ , e  $\mu_{K, \langle u,v \rangle} \{\omega_{\langle u,v \rangle} = 1\} = p_{K, \|u-v\|}$ . O problema do truncamento ainda em aberto é o seguinte: é verdade que existe um  $K$  inteiro positivo grande o suficiente tal que a origem no processo truncado  $(\Omega, \mathcal{F}, P_K)$  ainda percola com probabilidade positiva? Nossa expectativa é de que o Teorema 3.1, em sua versão para percolação de elos, possa ajudar a compreender o problema do truncamento.

Em relação ao problema acima, há uma extensa lista de trabalhos dedicados ao assunto especificamente ou mesmo à assuntos relacionados ao tema. Podemos citar como exemplos os artigos [5], [8], [9], [22] e [24].

O capítulo se divide da seguinte maneira: na Seção 3.1 apresentaremos as definições necessárias e enunciaremos dois lemas que serão essências na demonstração do resultado principal (Teorema 3.1). Nessa mesma seção mostraremos como os lemas implicam na demonstração do resultado principal. Na Seção 3.2 apresentaremos as demonstrações dos lemas mencionados acima.

## 3.1 Resultados

Nesta seção apresentaremos um teorema que consideramos ser o resultado principal deste capítulo. Antes porém, serão necessárias algumas definições.

Em primeiro lugar, para  $k$  inteiro positivo, considere o grafo  $\mathcal{G}^k = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_k)$ , onde  $\mathcal{E}_k$  é definido na Expressão (1.3.1). Note que  $\mathcal{G}^k$  é  $\mathbb{Z}^d$  equipado com os elos de comprimento 1 e elos de longo alcance de comprimento  $k$  paralelos a algum eixo coordenado. A Figura 3.1 mostra a estrutura do grafo  $\mathcal{G}^3$ .

Nesse grafo realizamos um processo de percolação independente da mesma maneira que fizemos na Seção 1.1 e consideramos a função

$$\theta_v^{\mathcal{G}^k} : [0, 1] \rightarrow [0, 1],$$

onde

$$\theta_v^{\mathcal{G}^k}(p) = P_p\{\omega \in \Omega : v \rightarrow \infty \text{ em } \mathcal{G}^k\}.$$

Observe que  $\mathcal{G}^k$  é um grafo transitivo, e portanto a função  $\theta_v^{\mathcal{G}^k}(p)$  não depende de  $v$  e assim podemos escrever apenas  $\theta^{\mathcal{G}^k}(p)$  para denotar  $P_p\{\omega \in \Omega : 0 \leftrightarrow \infty \text{ em } \mathcal{G}^k\}$ . Isto é,  $\theta^{\mathcal{G}^k}(p)$  é a probabilidade da origem percolar no grafo  $\mathcal{G}^k$ .

De fato, estudaremos a função acima em um contexto mais geral e para isso são necessárias

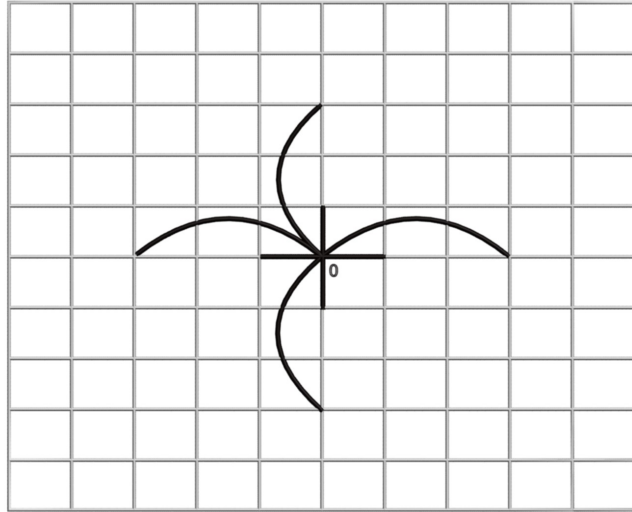


Figura 3.1: Estrutura do grafo  $\mathcal{G}^3$  na origem.

outras definições. Dado  $n \in \mathbb{N}$ , defina o vetor  $n$ -dimensional  $\vec{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ , onde  $k_i \in \{2, 3, \dots\}, \forall i = 1, \dots, n$ . Defina também o grafo

$$\mathcal{G}^{\vec{k}} = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{E}_1 \cup (\cup_{i=1}^n \mathcal{E}_{k_1 \times \dots \times k_i})),$$

isto é,  $\mathcal{G}^{\vec{k}}$  é  $\mathbb{Z}^d$  equipado com os elos de comprimento  $1, k_1, k_1 \times k_2, \dots, k_1 \times k_2 \times \dots \times k_n$ , paralelos a algum eixo coordenado. Observe que, quando  $n = 1$  e  $k_1 = k$ , o grafo  $\mathcal{G}^{\vec{k}}$  é o grafo  $\mathcal{G}^k$  definido acima.

Fixemos, por um momento, nossa atenção ao grafo  $\mathcal{G}^k$  e observe que duas perguntas podem ser feitas imediatamente. Em primeiro lugar, fixado  $p$ , o que acontece com  $\theta^{\mathcal{G}^k}(p)$  quando aumentamos o valor da constante  $k$ ? Em segundo lugar, poderíamos esperar algum comportamento assintótico de  $p_c(\mathcal{G}^k)$  quando  $k$  vai para o infinito? O teorema que enunciaremos a seguir responde a segunda pergunta. A primeira pergunta ainda é um problema aberto, embora no final do capítulo apresentemos uma conjectura.

**Teorema 3.1.** *Seja  $p_c(\mathcal{Z}^{d(n+1)})$  o ponto crítico de um modelo de percolação de sítios independente em  $\mathcal{Z}^{d(n+1)}$ . Então*

$$\lim_{k_i \rightarrow \infty, \forall i} p_c(\mathcal{G}^{\vec{k}}) = p_c(\mathcal{Z}^{d(n+1)}).$$

*Em particular*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_c(\mathcal{G}^k) = p_c(\mathcal{Z}^{2d}).$$

Esse resultado fornece uma caracterização para o ponto crítico de  $\mathcal{G}^{\vec{k}}$ . Sua demonstração se torna simples uma vez que estabelecemos os dois lemas que seguem. Novamente, definições adicionais são necessárias.

Considere o grafo com conjunto de vértices

$$\mathcal{V} = (\mathbb{Z} \times \prod_{i=1}^n \{0, 1, \dots, k_{n-i+1} - 1\})^d$$

e conjunto de elos

$$\mathcal{E} = \{\langle v, u \rangle \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}; \exists! i \in \{1, \dots, d(n+1)\} \text{ tal que } |v_i - u_i| = 1 \text{ e } v_j = u_j, \forall j \neq i\}.$$

Observe que esse grafo é a *Laje  $d(n+1)$ -dimensional* definida na Seção 1.5. O denotaremos por  $\mathcal{S}^{\vec{k}}$ .

Basicamente, os lemas a seguir fornecem cotas superior e inferior para a probabilidade de percolação em  $\mathcal{G}^{\vec{k}}$  em termos da probabilidade de percolação nos grafos  $\mathcal{S}^{\vec{k}}$  e  $\mathcal{Z}^{d(n+1)}$ . Suas respectivas demonstrações serão vistas na próxima seção.

**Lema 3.1.** *Para qualquer  $p \in [0, 1]$ ,  $\theta^{\mathcal{S}^{\vec{k}}}(p) \leq \theta^{\mathcal{G}^{\vec{k}}}(p)$ .*

**Lema 3.2.** *Para qualquer  $p \in [0, 1]$ ,  $\theta^{\mathcal{G}^{\vec{k}}}(p) \leq \theta^{\mathcal{Z}^{d(n+1)}}(p)$ .*

Com os Lemas 3.1 e 3.2 obtemos imediatamente a demonstração do Teorema 3.1.

### ***Demonstração do Teorema 3.1.***

Os Lemas 3.1 e 3.2 implicam que

$$\theta^{\mathcal{S}^{\vec{k}}}(p) \leq \theta^{\mathcal{G}^{\vec{k}}}(p) \leq \theta^{\mathcal{Z}^{d(n+1)}}(p), \quad \forall p \in [0, 1]. \quad (3.1.1)$$

Observando a definição de  $p_c(\cdot)$ , a desigualdade em (3.1.1) nos diz que

$$p_c(\mathcal{Z}^{d(n+1)}) \leq p_c(\mathcal{G}^{\vec{k}}) \leq p_c(\mathcal{S}^{\vec{k}}). \quad (3.1.2)$$

Como visto na Expressão (1.5.2) (Teorema A de [11]), temos que

$$\lim_{k_i \rightarrow \infty, \forall i} p_c(\mathcal{S}^{\vec{k}}) = p_c(\mathcal{Z}^{d(n+1)}). \quad (3.1.3)$$

Combinando (3.1.2) e (3.1.3), concluímos que

$$\lim_{k_i \rightarrow \infty, \forall i} p_c(\mathcal{G}^{\vec{k}}) = p_c(\mathcal{Z}^{d(n+1)}).$$

■

## 3.2 Provas dos lemas

Nesta seção apresentaremos as demonstrações dos lemas mencionados na seção anterior.

### *Demonstração do Lema 3.1.*

Com fins meramente didáticos, mostraremos aqui a demonstração para o caso  $n = 1$  e  $d = 2$ . A prova para o caso geral será exibida logo em seguida.

A idéia da demonstração é obter um segundo grafo  $\mathcal{F}^k$ , de tal maneira que  $\mathcal{F}^k \subseteq \mathcal{G}^k$ . Aqui  $\mathcal{F}^k \subseteq \mathcal{G}^k$  significa que o conjunto de vértices e o conjunto de elos de  $\mathcal{F}^k$  são subconjuntos do conjunto de vértices e do conjunto de elos de  $\mathcal{G}^k$  respectivamente. Feito isso, o próximo passo é mostrar que  $\mathcal{F}^k$  é isomorfo a  $\mathcal{S}^k$ . Como veremos a seguir, isso é suficiente para mostrar o resultado.

Partindo de  $\mathcal{G}^k$  definimos o grafo  $\mathcal{F}^k$  apagando alguns elos em  $\mathcal{G}^k$ . Mais precisamente,  $\mathcal{F}^k$  é o grafo  $(\mathbb{Z}^2, (\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_k) - R(k))$  onde

$$\begin{aligned} R(k) &= \{ \langle v, u \rangle \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 : \exists ! r \in \{1, 2\}, \exists l \in \mathbb{Z}, \\ &\quad \text{tais que } u_r = lk, v_r = (lk - 1) \text{ e } v_s = u_s, \text{ se } s \neq r \}. \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Observe que todos os elos de  $R(k)$  tem comprimento 1. Note também que  $\mathcal{F}^k$  é um subgrafo de  $\mathcal{G}^k$ , e portanto suas propriedades de conexão são inferiores às de  $\mathcal{G}^k$ . Isso significa

que a probabilidade de percolar em  $\mathcal{F}^k$  é no máximo igual à probabilidade de percolar em  $\mathcal{G}^k$ , ou seja,

$$\theta^{\mathcal{F}^k}(p) \leq \theta^{\mathcal{G}^k}(p), \quad \forall p \in [0, 1]. \quad (3.2.2)$$

Nosso trabalho agora se resume a encontrar um isomorfismo entre os grafos  $\mathcal{F}^k$  e  $\mathcal{S}^k$ . Caso tenhamos sucesso, então

$$\theta^{\mathcal{S}^k}(p) = \theta^{\mathcal{F}^k}(p), \quad \forall p \in [0, 1]. \quad (3.2.3)$$

Isso, juntamente com (3.2.2), conclui a demonstração do lema.

Para o caso particular em questão, lembre-se que

$$\mathcal{V}(\mathcal{S}^k) = (\mathbb{Z} \times \{0, 1, \dots, k-1\})^2.$$

Considere então a seguinte bijeção:

$$\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \{0, 1, \dots, k-1\} \quad (3.2.4)$$

onde

$$\phi(v) = \left( \left\lfloor \frac{v}{k} \right\rfloor, v \bmod k \right).$$

A função acima mapeia  $\mathbb{Z}$  na *parede*  $\{0, 1, \dots, k-1\} \times \mathbb{Z}$ . Veja a Figura 3.2.

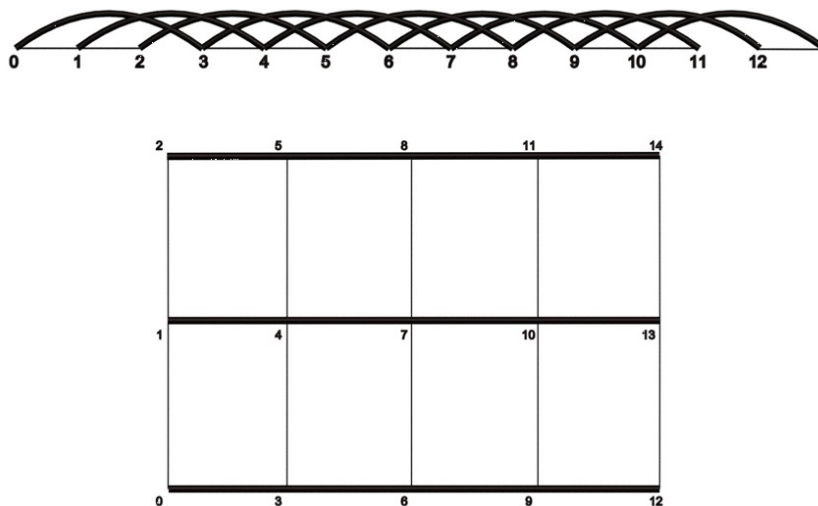


Figura 3.2: A função  $\phi$  mapeia a figura superior na figura inferior.



Defina agora a função

$$\Phi : \mathbb{Z}^2 \rightarrow (\mathbb{Z} \times \{0, 1, \dots, k-1\})^2, \quad (3.2.5)$$

onde

$$\Phi(v_1, v_2) = (\phi(v_1), \phi(v_2)),$$

e observe que  $\Phi$  é o isomorfismo desejado entre os grafos  $\mathcal{F}^k$  e  $\mathcal{S}^k$ . ■

### *Demonstração para o caso geral.*

Novamente, gostaríamos de obter um grafo  $\mathcal{F}^{\vec{k}}$  de tal maneira que  $\mathcal{F}^{\vec{k}} \subseteq \mathcal{G}^{\vec{k}}$ . Feito isso, nosso trabalho será mostrar que  $\mathcal{F}^{\vec{k}}$  é isomorfo a  $\mathcal{S}^{\vec{k}}$ .

Partindo de  $\mathcal{G}^{\vec{k}}$  definimos o grafo  $\mathcal{F}^{\vec{k}}$  apagando alguns elos em  $\mathcal{G}^{\vec{k}}$ . Formalmente,  $\mathcal{F}^{\vec{k}}$  é o grafo  $(\mathbb{Z}^d, (\mathcal{E}_1 \cup (\cup_{i=1}^n \mathcal{E}_{k_1 \times \dots \times k_i})) - \cup_{i=1}^n R_i(\vec{k}))$  onde

$$\begin{aligned} R_i(\vec{k}) &= \{ \langle v, u \rangle \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d; \exists! r \in \{1, \dots, d\}, \exists l \in \mathbb{Z}, \exists j \in \{0, \dots, k_1 \times \dots \times k_{i-1} - 1\} \\ &\quad \text{tal que } u_r = lk_1 \dots k_i + j, v_r = k_1 \dots k_{i-1}(lk_i - 1) + j \\ &\quad \text{e } v_s = u_s, \forall s \neq r \}. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Note que todos elos em  $R_i$  tem comprimento  $k_1 \times \dots \times k_{i-1}$ . Como  $\mathcal{F}^{\vec{k}}$  é um subgrafo de  $\mathcal{G}^{\vec{k}}$ , obtemos a desigualdade

$$\theta^{\mathcal{F}^{\vec{k}}}(p) \leq \theta^{\mathcal{G}^{\vec{k}}}(p), \quad \forall p \in [0, 1]. \quad (3.2.7)$$

Afirmamos que os grafos  $\mathcal{F}^{\vec{k}}$  e  $\mathcal{S}^{\vec{k}}$  são isomorfos. Para ver isso, considere a função

$$\psi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \prod_{i=1}^n \{0, 1, \dots, k_{n-i+1} - 1\}, \quad (3.2.8)$$

onde

$$\psi(v) = \left( \lfloor \frac{v}{k_1 \dots k_n} \rfloor, \lfloor \frac{v \bmod k_1 \dots k_n}{k_1 \dots k_{n-1}} \rfloor, \dots, \lfloor \frac{v \bmod k_1 k_2}{k_1} \rfloor, v \bmod k_1 \right).$$

De fato a função

$$\Psi : \mathbb{Z}^d \rightarrow \left( \mathbb{Z} \times \left( \prod_{i=1}^n \{0, 1, \dots, k_{n-i+1} - 1\} \right) \right)^d, \quad (3.2.9)$$

onde

$$\Psi(v_1, \dots, v_d) = (\psi(v_1), \dots, \psi(v_d)),$$

é um isomorfismo entre os grafos  $\mathcal{F}^{\bar{k}}$  e  $\mathcal{S}^{\bar{k}}$ . Logo,

$$\theta^{\mathcal{S}^{\bar{k}}}(p) = \theta^{\mathcal{F}^{\bar{k}}}(p), \quad \forall p \in [0, 1], \quad (3.2.10)$$

o que juntamente com a desigualdade em (3.2.7) completa a demonstração do lema.  $\blacksquare$

### *Demonstração do Lema 3.2.*

Para melhor compreensão nesse momento, apresentaremos a demonstração para o caso  $n = 1$  e  $d = 2$ . A prova do caso geral será vista em seguida.

Gostaríamos de mostrar então que, dado qualquer  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\theta^{\mathcal{G}^k}(p) \leq \theta^{\mathcal{Z}^4}(p), \quad \forall p \in [0, 1].$$

Ao demonstrar o Lema 3.1, mostramos que os grafos  $\mathcal{F}^k$  e  $\mathcal{S}^k$  são isomorfos segundo a função  $\Phi$ , onde  $\mathcal{F}^k$  é obtido apagando-se alguns elos específicos de  $\mathcal{G}^k$ . Inserindo os respectivos elos novamente em  $\mathcal{S}^k$ , obtemos um novo grafo, que chamaremos  $\bar{\mathcal{S}}^k$ , que é isomorfo a  $\mathcal{G}^k$ . Essa informação é importante, visto que o que mostraremos de fato é

$$\theta^{\bar{\mathcal{S}}^k}(p) \leq \theta^{\mathcal{Z}^4}(p), \quad \forall p \in [0, 1].$$

Formalmente, temos

$$\bar{\mathcal{S}}^k = (\mathcal{V}(\mathcal{S}^k), \mathcal{E}(\mathcal{S}^k) \cup \bar{R}(k)), \quad (3.2.11)$$

onde

$$\bar{e} = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle \in \bar{R}(k) \Leftrightarrow \bar{u} = \Phi(u) \text{ e } \bar{v} = \Phi(v), \quad e = \langle u, v \rangle \in R(k)$$

e  $R(k)$  é dado na expressão (3.2.1). Aqui,  $\Phi$  é a função definida em (3.2.5).

Para o que faremos a seguir, será necessário comparar dois processos de percolação nos grafos  $\mathcal{Z}^4$  e  $\bar{\mathcal{S}}^k$ . Para isso, considere a família de variáveis aleatórias independentes  $\{\kappa_v, v \in \mathcal{V}(\bar{\mathcal{S}}^k)\}$  com distribuição de Bernoulli com parâmetro  $p$ . Dado  $v \in \mathcal{V}(\bar{\mathcal{S}}^k)$ , dizemos que  $v$  está ocupado se  $\kappa_v = 1$ . Caso contrário, dizemos que  $v$  está vazio. Observe que

$$P_p\{\kappa_v = 1\} = p = 1 - P_p\{\kappa_v = 0\}, \quad \forall v \in \mathcal{V}(\bar{\mathcal{S}}^k). \quad (3.2.12)$$

A partir de agora usaremos um argumento de construção dinâmica do aglomerado. Faremos essa construção em  $\bar{\mathcal{S}}^k$ , e a função que definiremos a seguir irá induzir uma construção semelhante em  $\mathcal{Z}^4$ . Fixado  $p \in [0, 1]$ , a idéia é que sempre que ocorrer percolação em  $\bar{\mathcal{S}}^k$  também ocorrerá percolação em  $\mathcal{Z}^4$ , isto é,  $\theta^{\bar{\mathcal{S}}^k}(p) \leq \theta^{\mathcal{Z}^4}(p) \forall p \in [0, 1]$ .

Podemos escrever cada vértice  $v \in \mathcal{Z}^4$  como  $v = (v_1, v_2)$ ,  $v_i \in \mathbb{Z}^2$ ,  $i = 1, 2$ . Para cada  $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{Z}^2$ , defina a função

$$h : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z} \times \{0, 1, \dots, k-1\}, \quad (3.2.13)$$

onde

$$h(y) = (y_1 + \lfloor \frac{y_2}{k} \rfloor, y_2 \bmod k). \quad (3.2.14)$$

Observe que a função  $h$  é sobrejetiva e mapeia  $\mathbb{Z}^2$  na *parede*  $\mathbb{Z} \times \{0, 1, \dots, k-1\}$ . Veja a Figura 3.3 para uma representação quando  $k = 3$ .

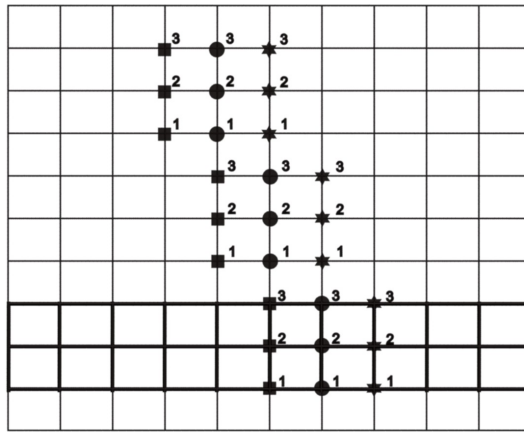


Figura 3.3: A função  $h$  mapeia os pontos rotulados com figuras geométricas numeradas em seus respectivos pontos em  $\mathbb{Z} \times \{0, 1, 2\}$ , representado pelas linhas em destaque.

Defina também a função sobrejetiva

$$H : \mathbb{Z}^4 \rightarrow (\mathbb{Z} \times \{0, 1, \dots, k-1\})^2, \quad (3.2.15)$$

onde

$$H(v) = (h(v_1), h(v_2)). \quad (3.2.16)$$

Seja  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{E}(\bar{\mathcal{S}}^k)$  uma ordem fixa dos elos de  $\bar{\mathcal{S}}^k$ . Construiremos agora, indutivamente, duas seqüências de pares ordenados  $I_n = (A_n, B_n)$  e  $J_n = (C_n, D_n)$ , onde  $A_n$  e  $B_n$  são subconjuntos de vértices de  $\bar{\mathcal{S}}^k$  e  $C_n$  e  $D_n$  são subconjuntos de vértices de  $\mathcal{Z}^4$ .

Faça  $I_0 = (\emptyset, \emptyset)$ ,  $J_0 = (\emptyset, \emptyset)$  e defina

$$I_1 = \begin{cases} (v_0, \emptyset), & \text{se } \kappa_{v_0} = 1, \\ (\emptyset, v_0), & \text{se } \kappa_{v_0} = 0, \end{cases}$$

onde  $v_0$  é a origem de  $\bar{\mathcal{S}}^k$ .

A construção dinâmica de  $I_n$  irá induzir a seqüência  $J_n$ . Para isso, seja  $u_0$  a origem de  $\mathcal{Z}^4$  e defina

$$J_1 = \begin{cases} (u_0, \emptyset), & \text{se } \kappa_{v_0} = 1, \\ (\emptyset, u_0), & \text{se } \kappa_{v_0} = 0. \end{cases}$$

Definidas as seqüências  $I_n = (A_n, B_n)$  e  $J_n = (C_n, D_n)$ , seja  $e_n$  o primeiro elo da ordem fixada com um vértice pertencente a  $A_n$  e o outro vértice, digamos  $v_n$ , pertencente a  $(A_n \cup B_n)^c$ . Denote o vértice pertencente a  $A_n$  por  $v_{i_n}$  e note que  $i_n \in \{0, \dots, n-1\}$ . Definimos

$$I_{n+1} = \begin{cases} (A_n \cup v_n, B_n), & \text{se } \kappa_{v_n} = 1, \\ (A_n, B_n \cup v_n), & \text{se } \kappa_{v_n} = 0. \end{cases}$$

Defina

$$H^{-1}(x) = \{y \in \mathbb{Z}^4 : H(y) = x\} \quad (3.2.17)$$

e seja  $V_x = \{y \in \mathbb{Z}^4 : \|x - y\| = 1\}$  uma vizinhança do vértice  $x$ , onde  $\|\cdot\|$  é dado em (2.1.6). Defina também  $u_{i_n}$  como o vértice examinado no  $i_n$ -ésimo passo da construção dinâmica. Tome o único  $u_n \in H^{-1}(v_n) \cap V_{u_{i_n}}$  e defina  $T_{n+1}$  da seguinte maneira:

$$J_{n+1} = \begin{cases} (C_n \cup u_n, D_n), & \text{se } \kappa_{v_n} = 1, \\ (C_n, D_n \cup u_n), & \text{se } \kappa_{v_n} = 0. \end{cases}$$

Caso o elo  $e_n$  não exista, definimos  $I_n = I_k$  e  $J_n = J_k$ ,  $\forall k \geq n$ , e a construção é finalizada.

Considere agora o par  $I = (A, B)$ , onde  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  e  $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ . Considere também  $J = (C, D)$ , onde  $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$  e  $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ . Com a rotina acima, eventualmente construímos o aglomerado ocupado  $A$  contendo a origem de  $\bar{\mathcal{S}}^k$ . Observe que no

$(n + 1)$ -ésimo passo da construção dinâmica temos que

$$u_n \neq u_j \text{ e } \langle u_j, u_{j-1} \rangle \in \mathcal{E}(\mathcal{Z}^4), \forall j \in \{0, 1, \dots, n-1\}. \quad (3.2.18)$$

Portanto, a construção acima nos permite obter um subconjunto conexo  $C$  do aglomerado ocupado da origem de  $\mathcal{Z}^4$ .

Finalmente, (3.2.12) e (3.2.18) implicam que

$$\theta^{\mathcal{G}^k}(p) = P_p\{|A| = \infty\} = P_p\{|C| = \infty\} \leq \theta^{\mathcal{Z}^4}(p), \quad \forall p \in [0, 1].$$

Isso completa a demonstração do lema. ■

### *Demonstração para o caso geral.*

Considere agora a demonstração para o caso geral, onde  $\vec{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ ,  $k_i \in \{2, 3, \dots\}$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, n$ . A idéia geral da demonstração é a mesma que apresentamos anteriormente nos caso  $n = 1$  e  $d = 2$ . Vimos na demonstração do Lema 3.1 que os grafos  $\mathcal{F}^{\vec{k}}$  e  $\mathcal{S}^{\vec{k}}$  são isomorfos segundo a função  $\Psi$ , onde  $\mathcal{F}^{\vec{k}}$  é obtido apagando-se alguns elos específicos de  $\mathcal{G}^{\vec{k}}$ . Considere portanto o grafo

$$\bar{\mathcal{S}}^{\vec{k}} = (\mathcal{V}(\mathcal{S}^{\vec{k}}), \mathcal{E}(\mathcal{S}^{\vec{k}}) \cup (\cup_{i=1}^n \bar{R}_i(\vec{k}))), \quad (3.2.19)$$

onde  $\bar{R}_i$  é dado na expressão (3.2.6), e note que  $\bar{\mathcal{S}}^{\vec{k}}$  é isomorfo à  $\mathcal{G}^{\vec{k}}$ . Aqui

$$\bar{e} = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle \in \bar{R}_i(\vec{k}) \Leftrightarrow \bar{u} = \Psi(u) \text{ e } \bar{v} = \Psi(v), \text{ e } e = \langle u, v \rangle \in R_i(\vec{k}).$$

Mostraremos agora que

$$\theta^{\bar{\mathcal{S}}^{\vec{k}}}(p) \leq \theta^{\mathcal{Z}^{d(n+1)}}(p), \quad \forall p \in [0, 1].$$

Defina a família de variáveis aleatórias independentes  $\{\lambda_v, v \in \mathcal{V}(\bar{\mathcal{S}}^{\vec{k}})\}$  com distribuição de Bernoulli com parâmetro  $p$ . De maneira usual, dado  $v \in \mathcal{V}(\bar{\mathcal{S}}^{\vec{k}})$ , dizemos que  $v$  está ocupado se  $\lambda_v = 1$ . Caso contrário, dizemos que  $v$  está vazio. Note que

$$P_p\{\lambda_v = 1\} = p = 1 - P_p\{\lambda_v = 0\} \quad \forall v \in \mathcal{V}(\bar{\mathcal{S}}^{\vec{k}}). \quad (3.2.20)$$

Podemos escrever cada vértice  $v \in \mathbb{Z}^{d(n+1)}$  como  $v = (v_1, \dots, v_d)$ , onde  $v_i \in \mathbb{Z}^{n+1}$ . Para cada

$$v_j = (v_{j,1}, \dots, v_{j,n+1}),$$

definiremos a função sobrejetiva

$$\gamma : \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z} \times \prod_{i=1}^n \{0, 1, \dots, k_{n-i+1} - 1\}, \quad (3.2.21)$$

de maneira recursiva. Para facilitar a notação, escreva  $(v_{j,1}, \dots, v_{j,n+1}) = (y_1, \dots, y_{n+1})$ .

Definimos  $\gamma(y_1, \dots, y_{n+1}) = (z_1, \dots, z_{n+1})$ , onde a sequência  $(z_k)_{k=1}^{n+1}$  é obtida recursivamente da seguinte maneira: defina

$$z_{n+1} = y_{n+1} \pmod{k_1} \quad \text{e} \quad t_{n+1} = \lfloor \frac{y_{n+1}}{k_1} \rfloor.$$

Definidos  $t_{i+1}$  e  $z_{i+1}$ , definimos  $z_i$  e  $t_i$  da seguinte maneira:

$$z_i = (y_i + t_{i+1}) \pmod{k_{n+2-i}} \quad \text{e} \quad t_i = \lfloor \frac{y_i + t_{i+1}}{k_{n+2-i}} \rfloor, \quad \forall i = 2, \dots, n.$$

Finalmente, definimos  $z_1 = y_1 + t_2$ .

Defina agora a função sobrejetiva

$$\Gamma : \mathbb{Z}^{d(n+1)} \rightarrow (\mathbb{Z} \times \prod_{i=1}^n \{0, 1, \dots, k_{n-i+1} - 1\})^d, \quad (3.2.22)$$

onde

$$\Gamma(v) = (\gamma(v_1), \gamma(v_2), \dots, \gamma(v_d)). \quad (3.2.23)$$

Seja  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{E}(\bar{\mathcal{S}}^{\vec{k}})$  uma ordem fixa dos elos de  $\bar{\mathcal{S}}^{\vec{k}}$ . Construiremos agora, indutivamente, duas sequências de pares ordenados  $I_n = (A_n, B_n)$  e  $J_n = (C_n, D_n)$ , onde  $A_n$  e  $B_n$  são subconjuntos de vértices de  $\bar{\mathcal{S}}^{\vec{k}}$  e  $C_n$  e  $D_n$  são subconjuntos de vértices de  $\mathcal{Z}^{d(n+1)}$ .

Faça  $I_0 = (\emptyset, \emptyset)$ ,  $J_0 = (\emptyset, \emptyset)$  e defina

$$I_1 = \begin{cases} (v_0, \emptyset), & \text{se } \lambda_{v_0} = 1, \\ (\emptyset, v_0), & \text{se } \lambda_{v_0} = 0, \end{cases}$$

onde  $v_0$  é a origem de  $\bar{\mathcal{S}}^{\vec{k}}$ .

A construção dinâmica de  $I_n$  irá induzir a sequência  $J_n$ . Para isso, seja  $u_0$  a origem de  $\mathcal{Z}^{d(n+1)}$  e defina

$$J_1 = \begin{cases} (u_0, \emptyset), & \text{se } \lambda_{v_0} = 1, \\ (\emptyset, u_0), & \text{se } \lambda_{v_0} = 0. \end{cases}$$

Com as modificações óbvias, a partir daqui a construção é rigorosamente a mesma que fizemos na demonstração do caso particular  $n = 1$  e  $d = 2$ , com a função  $H$  definida em (3.2.16) sendo trocada pela função  $\Gamma$  definida em (3.2.23). ■

### 3.3 Uma conjectura

Na seção 3.1 fizemos a seguinte pergunta: o que acontece com a função  $\theta^{\mathcal{G}^k}(p)$  quando aumentamos o valor da constante  $k$ ? Poderíamos esperar alguma propriedade de monotonicidade? Nesta seção apresentamos uma conjectura que, caso seja verdadeira, responde essa pergunta.

Considere os vetores  $\vec{k} = (k_1, \dots, k_n)$  e  $\vec{k}' = (k'_1, \dots, k'_n)$ . Dizemos que  $\vec{k} \geq \vec{k}'$  se  $k_j \geq k'_j, \forall j = 1, \dots, n$ .

**Conjectura:** Se  $\vec{k} \geq \vec{k}'$ , então

$$\theta^{\mathcal{G}^{\vec{k}'}}(p) \geq \theta^{\mathcal{G}^{\vec{k}}}(p), \quad \forall p \in [0, 1].$$

Essa conjectura em sua versão mais simples, ou seja, quando  $n = 1$ , diz que a função  $\theta^{\mathcal{G}^k}(p)$  é não decrescente em  $k$ .

# Referências Bibliográficas

---

- [1] M. Aizenmann e J. Lebowitz. *Metastability effects in bootstrap percolation*. Journal of Physics A, Mathematical and General, **21**, 3801-3813, (1988).
- [2] M. Aizenmann e D.J. Barsky. *Sharpness of the phase transition in percolation models*. Communications in Mathematical Physics **108**, 489-526, (1987).
- [3] I. Benjamini e H. Kesten. *Percolation of arbitrary words in  $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$* . The Annals of Probability **23**, no. 3, 1024-1060, (1995).
- [4] I. Benjamini e O. Schramm. *Percolation beyond  $\mathbb{Z}^d$ , many questions and a few answers*. Electronic Communications in Probability **1**, 71-82, (1996).
- [5] N. Berger. *Transience, Recurrence and Critical Behaviour For Long-Range Percolation*. Commun. Math. Phys., **226**, 531-558, (2002).
- [6] S. R. Broadbent e J. M. Hammersley. *Percolation processes I. crystals and mazes*. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **53**, 629-641, (1957).
- [7] M. Campanino e L. Russo. *An upper bound for the critical probability for the three-dimensional cubic lattice*. Annals of Probability, **13**, 478-491, (1985).
- [8] S. Friedli, B.N.B de Lima. *On the truncation systems with non-summable interactions*. Journal of Statistical Physics, **122**(6), 1215-1236, (2006).
- [9] S. Friedli, B.N.B de Lima e V. Sidoravicius. *On long-range percolation with heavy tails*. Electronic Communications in Probability, **9**, 175-177, (2004).
- [10] G. R. Grimmett, T.M. Liggett e T. Richthammer. *Percolation of arbitrary words in one dimension*. Random Structures and Algorithms **37**, 85-99 (2010).
- [11] G. R. Grimmett e J.M. Marstrand, *The Supercritical Phase of Percolation is Well Behaved*, Proc. Roy. Soc. London Ser **A 430**, 439-457 (1990).



- [12] G. R. Grimmett *Percolation, Second ed.*, Springer-Verlag, (1999).
- [13] G. R. Grimmett, *Three Problems For The Clairvoyant Demon*, Probability and Mathematical Genetics **378**, 379-396 (2010).
- [14] T.E. Harris, *A lower bound for the critical probability in a certain percolation process*, Proceedings for the Cambridge Philosophical Society **56**, 13-20 (1960).
- [15] H. Kesten. *Asymptotics in high dimensions for percolation*. Disorder in Physical Systems (G.R. Grimmett, D.J.A. Welsh, eds.), Clarendon Press, Oxford (1990).
- [16] H. Kesten. *Percolation Theory For Mathematicians*. Birkhauser, Boston (1982).
- [17] H. Kesten, V. Sidoravicius e Y. Zhang. *Percolation of arbitrary words on the closed-pack graph of  $\mathbb{Z}^2$* . Electronic Journal of Probability **6**, 1-27 (2001).
- [18] H. Kesten, V. Sidoravicius e Y. Zhang. *Almost all words are seen in critical site percolation on the triangular lattice*. Electronic Journal of Probability **3**, 1-75 (1998).
- [19] B.N.B. de Lima. *A note about the truncation's question in percolation of words*. Bulletin of The Brazilian Mathematical Society **39**, 183-189 (2008).
- [20] B.N.B de Lima, R. Sanchis, R.W.C. Silva. *Percolation of Words on  $\mathbb{Z}^d$  With Long Range Connections*. Submetido para publicação.
- [21] B.N.B de Lima, R. Sanchis, R.W.C. Silva. *Percolation Probability and Critical Point In a Long Range Percolation Model*. Em preparação.
- [22] B.N.B. de Lima e A. Sapozhnikov. *On the truncated long range percolation on  $\mathbb{Z}^2$* . Journal of Applied Probability **45**, 287-291 (2008).
- [23] T. Mai e J.W. Halley. *AB percolation on a triangular lattice*. In Ordering Two Dimensions (s.k. Sinha, ed), 369-371. North Holland, Amsterdam (1980).
- [24] R. Meester e J.E. Steif. *On the continuity of the critical value for long-range percolation in the exponential case*. Communications in Mathematical Physics **180**, 483-504, (1996).
- [25] M.V. Menshikov. *Coincidence of critical points in percolation problems*. Soviet Mathematics Doklady **33**, 856-859, (1986).

- [26] V. Sidoravicius, D. Surgalis and M.E. Vares. *On the truncated anisotropic long-range percolation on  $\mathbb{Z}^2$* . Stochastic Processes and Applications **81**, 337-349, (1999).
- [27] J.C. Wierman. *Substitution method critical probability bounds for the square lattice site percolation model*. Combinatorics, Probability and Computing. **4**, 181-188, (1995).
- [28] J.C. Wierman e M.S. Appel. *Infinite AB percolation clusters exist on the triangular lattice*. Journal of Physics A. **20**, 2533-2537, (1987).