

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA**  
**DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA - UFMG**  
**PROVA DE SELEÇÃO DO MESTRADO - 2024**

A nota obtida na prova será determinada pelo número de questões respondidas corretamente, de acordo com a seguinte tabela.

Respostas corretas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nota	0	5	10	20	30	40	50	60	70	80	90	95	100

### QUESTÃO 1

O número  $X$  de solicitações de assistência recebido por um serviço de Guincho segue a distribuição Poisson com média de 2 solicitações por hora. Considere o evento  $A$  sendo a chegada de no mínimo 1 solicitação em um período de 1 hora e o evento  $B$  sendo a chegada de 6 solicitações em duas horas. Escolha a alternativa verdadeira.

- (a)  $P(A) = 3e^{-2}$  e  $P(B) = e^{-4}4^6(6!)^{-1}$
- (b)  $P(A) = 1 - e^{-2}$  e  $P(B) = e^{-4}4^6(6!)^{-1}$
- (c)  $P(A) = 1 - e^{-2}$  e  $P(B) = e^{-2}2^3(3!)^{-1}$
- (d)  $P(A) = 2e^{-2}$  e  $P(B) = e^{-4}4^6(6!)^{-1}$
- (e)  $P(A) = 2e^{-2}$  e  $P(B) = e^{-2}2^3(3!)^{-1}$

### QUESTÃO 2

A demanda diária de arroz em um determinado supermercado, em centenas de quilos, é uma variável aleatória  $X$  com função de densidade

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x, & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ -\frac{1}{3}x + 1, & \text{se } 1 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 3. \end{cases}$$

- i) Qual é a probabilidade de que, em um dia escolhido aleatoriamente, se venda mais do que 100 quilos?
- ii) Em 30 dias, o gerente do supermercado quanto espera vender?
- iii) Calcule a moda da venda de arroz.

Escolha a alternativa correta que corresponda às respostas dos itens (i), (ii) e (iii), respectivamente.

- (a)  $\frac{1}{3}$ , 5647 kg, 200 kg.

- (b)  $\frac{2}{3}$ , 4320 kg, 100 kg.
- (c)  $\frac{2}{3}$ , 4000 kg, 100 kg.
- (d)  $\frac{1}{3}$ , 4000 kg, 150 kg.
- (e)  $\frac{2}{3}$ , 5647 kg, 200 kg.

### QUESTÃO 3

Suponha um grupo de estudantes fará um teste com 25 questões e que o tempo para a realização de cada questão é independente e identicamente distribuído segundo uma distribuição exponencial com uma média de 5 minutos e, consequentemente, desvio padrão de 5 minutos. Podemos dizer que, aproximadamente, a probabilidade do estudante demorar mais do que 2,5 horas para a realização do teste é igual a qual item abaixo.

- (a) 0,1587
- (b) 0,4207
- (c)  $1 - \exp\{-6/5\}$
- (d)  $\exp\{-6/5\}$
- (e) 0,8413

### QUESTÃO 4

O tempo entre dois atendimentos do SAC de uma empresa de telefonia tem distribuição exponencial com média de 4 minutos. Qual a probabilidade de que haja 3 atendimentos em 8 minutos?

- (a)  $4 \exp\{-12\}$
- (b)  $(1/4) \exp\{-3/4\}$
- (c)  $(4/3) \exp\{-2\}$
- (d)  $8 \exp\{-12\}$
- (e)  $(1/8) \exp\{-1/4\}$

### QUESTÃO 5

Seja  $X$  uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo  $(0, 1)$ . Considere as variáveis aleatórias  $Y = X^2 + 1$  e  $Z = 1/(X + 1)$ . Escolha a opção correta referente as funções densidade de probabilidade das variáveis  $Y$  e  $Z$ .

- (a)  $f(y) = (y - 1)^{0,5}$ , para  $1 < y < 2$ , e  $f(z) = 2 - z^{-1}$ , para  $0,5 < z < 1$
- (b)  $f(y) = (y - 1)^{-0,5}/2$ , para  $1 < y < 2$ , e  $f(z) = z^{-2}$ , para  $0,5 < z < 1$
- (c)  $f(y) = (y - 1)^{0,5}/2$ , para  $1 < y < 2$ , e  $f(z) = 2z^{-2}$ , para  $0,5 < z < 1$
- (d)  $f(y) = (y - 1)^{-0,5}$ , para  $1 < y < 2$ , e  $f(z) = z^{-2}$ , para  $0,5 < z < 1$
- (e)  $f(y) = (y - 1)^{0,5}$ , para  $1 < y < 2$ , e  $f(z) = z^{-2}$ , para  $0,5 < z < 1$

## QUESTÃO 6

Suponha um estudo sobre o desempenho de estudantes em um disciplina. Saiba que um estudante tem probabilidade 0,6 de acertar uma questão específica, se ele é da Turma A. Essa probabilidade é igual a 0,8 , se ele é da Turma B. Além disso, também é conhecido que 40% dos estudantes estão matriculados na Turma A, enquanto que 60% dos estudantes estão matriculados na Turma B. Um exame contém 10 questões de nível idêntico e que são consideradas independentes. Um estudante foi sorteado ao acaso e acertou 8 questões. Qual é a probabilidade dele ser da Turma A?

- (a)  $(0,6)^8(0,4)^3/[ (0,6)^8(0,4)^3 + 0,6(0,8)^8(0,2)^2 ]$
- (b)  $(0,4)^9(0,6)^2/[ (0,4)^9(0,6)^2 + 0,6(0,2)^8(0,8)^2 ]$
- (c)  $45(0,6)^8(0,4)^2$
- (d)  $45(0,6)^8(0,4)^3$
- (e)  $(0,6)^9(0,4)^2/[ (0,6)^9(0,4)^2 + 0,4(0,8)^8(0,2)^2 ]$

## QUESTÃO 7

Admitindo que a pressão sanguínea arterial em homens tem distribuição normal, 9 pacientes foram sorteados e tiveram sua pressão medida obtendo média amostral de 79,3 e variância amostral de 25. Qual é o intervalo de confiança para a pressão arterial média com coeficiente de confiança de 95%?

- (a)  $[79,3 - 1,962(25/3); 79,3 + 1,96(25/3)]$
- (b)  $[79,3 - 2,58(25/3); 79,3 + 2,58(25/3)]$
- (c)  $[79,3 - 2,306(25/3); 79,3 + 2,306(25/3)]$
- (d)  $[79,3 - 2,306(5/3); 79,3 + 2,306(5/3)]$
- (e)  $[79,3 - 2,58(5/3); 79,3 + 2,58(5/3)]$

## QUESTÃO 8

Considere a função densidade de probabilidade  $f(x|\theta) = 1/\theta$ ,  $0 \leq x \leq \theta$ ,  $\theta > 0$ . Para a amostra independente e identicamente distribuída  $(1,4; 2,1; 3,2; 4,0; 4,7)$  de  $f(x|\theta)$ , a estimativa de  $\theta$  obtida pelo método dos momentos é

- (a) 3,2
- (b) 4,7
- (c) 6,4
- (d) 6,10
- (e) 6,16

## QUESTÃO 9

Seja  $X$  uma variável aleatória discreta que assume os valores 0, 1 e 2, e cuja função de probabilidade é:  $P[X = 0] = p^2$ ,  $P[X = 1] = 2p(1 - p)$  e  $P[X = 2] = (1 - p)^2$ ,  $0 < p < 1$ . Encontre o estimador de máxima verossimilhança para  $p$  a partir de uma amostra independente e identicamente distribuída de tamanho 200, na qual o valor 0 foi observado 40 vezes, o valor 1 foi observado 90 vezes e o valor 2 foi observado 70 vezes.

- (a)  $\hat{p} = \frac{110}{350}$
- (b)  $\hat{p} = \frac{130}{400}$
- (c)  $\hat{p} = \frac{170}{300}$
- (d)  $\hat{p} = \frac{130}{350}$
- (e)  $\hat{p} = \frac{170}{400}$

## QUESTÃO 10

Sejam  $X_1, \dots, X_{n_1}$ , e  $X_1, \dots, X_{n_2}$  duas amostras independentes e identicamente distribuídas retiradas de uma população  $N(\mu, \sigma^2)$ , com médias amostrais  $\bar{X}_1$  e  $\bar{X}_2$ , respectivamente. Um pesquisador pretende estimar a média populacional  $\mu$  e propõe como estimadores alternativas:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{2}(\bar{X}_1 + \bar{X}_2), \quad \tilde{\mu} = \frac{n_1 \bar{X}_1 + n_2 \bar{X}_2}{n_1 + n_2}.$$

Verifique se os estimadores são viciados e a eficiência entre  $\hat{\mu}$  e  $\tilde{\mu}$ . Escolha a resposta correta.

- (a)  $\hat{\mu}$  é não viciado e  $\tilde{\mu}$  viciado, para  $n_1 = n_2$  temos que  $\hat{\mu}$  é mais eficiente que  $\tilde{\mu}$

- (b) Ambos são não viciados e, para  $n_1 \neq n_2$  temos que  $\hat{\mu}$  é mais eficiente que  $\tilde{\mu}$
- (c) Ambos são viciados e, para  $n_1 = n_2$  temos que  $\tilde{\mu}$  é mais eficiente que  $\hat{\mu}$
- (d) Ambos são não viciados e, para  $n_1 \neq n_2$  temos que  $\tilde{\mu}$  é mais eficiente que  $\hat{\mu}$
- (e)  $\tilde{\mu}$  é não viciado e  $\hat{\mu}$  viciado, para  $n_1 \neq n_2$  temos que  $\tilde{\mu}$  é mais eficiente que  $\hat{\mu}$

### QUESTÃO 11

Seja  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra independente e identicamente distribuídas com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \theta x^{\theta-1}, \quad 0 < x < 1, \quad \theta > 0.$$

Denote por  $LI$  o limite inferior da desigualdade de Cramer-Rao para a variância de estimadores não viciados de  $\theta$ . Seja  $\hat{\theta}$  o estimador de máxima verossimilhança de  $\theta$ . Indique a opção correta.

- (a)  $LI = \theta^2$  e  $\hat{\theta} = -n/(\sum_{i=1}^n \ln x_i)$
- (b)  $LI = \theta^2/n$  e  $\hat{\theta} = -n/(\sum_{i=1}^n \ln x_i)$
- (c)  $LI = \theta^2/n$  e  $\hat{\theta} = n/(\sum_{i=1}^n x_i)$
- (d)  $LI = \theta^2$  e  $\hat{\theta} = \bar{X}$
- (e)  $LI = \theta^2/n$  e  $\hat{\theta} = (\sum_{i=1}^n \ln x_i)/n$

### QUESTÃO 12

Seja  $X_1, X_2, X_3, X_4$  uma amostra independente e identicamente distribuída da distribuição Bernoulli( $p$ ). Considere o teste uniformemente mais poderoso de tamanho  $\alpha = 0,1296$  para testar  $H_0 : p = 0,4$  versus  $H_1 : p = 0,3$ . Encontre o poder deste teste.

- (a) 0,8704
- (b) 0,7599
- (c) 0,6574
- (d) 0,3426
- (e) 0,2401

# Gabarito

**Nome do candidato:**

**Assinatura:**

Preencha com  $X$  na tabela abaixo a resposta de cada questão da prova. Serão consideradas apenas as respostas assinaladas na tabela abaixo.

Questão	Resposta				
	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					







